Eine Lösung zur Aufgabe 2 (c) des Übungsblattes 12.

Wie auf dem Übungsblatt sei $\Gamma := \mathrm{Gal}(l/k)$ eine endliche Galoissche Körpererweiterung, $\rho : G \to \mathrm{Aut}_k(V_k)$ eine irreduzible Darstellung einer endlichen Gruppe G über k und $V_l := l \otimes_k V_k$. Dann ist V_l eine l-lineare Darstellung von G der Dimension $\dim_l V_l = \dim_k V_k$.

Es sei $W_l \subseteq V_l$ ein irreduzibler Unterraum. Schreiben wir

$$\Gamma_W := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(W_l) \subseteq W_l\},$$

so wir wissen auch bereits, daß

$$\sum_{\gamma\Gamma_W \in \Gamma/\Gamma_W} \gamma(W) = V_l,$$

denn die linke Seite ist ein Γ-invarianter Unterraum von V_l, und damit nach (b) bereits über k definiert, d.h. von der Form $l \otimes_k W'$ mit einem $W' \subseteq V_k$. Nun ist V_k irreduzibel und $W' \neq 0$, ergo $W' = V_k$ und daher gilt in obiger Formel sogar die Gleichheit.

Schließlich zerfällt die linke Seite als Summe irreduzibler Darstellungen wieder in irreduzible Darstellungen, mithin erhalten wir

$$V_l = \bigoplus_{i=1}^{r} \gamma_i(W_l)$$

mit

$$\{\gamma_i\Gamma_W \mid 1 \leq i \leq r\} \subseteq \Gamma/\Gamma_W.$$

Es bleibt die Gleichheit dieser beiden Mengen zu zeigen (wir dürfen annehmen, daß die linke Seite Kardinalität r hat).

Hierzu betrachten wir W_l als k-Vektorraum W'_k. Das beschert uns eine Darstellung $\rho' : G \to W'_k$, wobei $W'_k = W_l$ ein k-Vektorraum der Dimension

$$\dim_k W'_k = [l : k] \cdot \dim_l W_l$$

ist.

Wir schreiben analog V'_k für V_l als k-Vektorraum. Dann gilt $W'_k \subseteq V'_k$. Doch $V'_k = l \otimes_k V_k$ ist nichts anderes als eine $[l : k]$-fache direkte Summe von V_k, denn G operiert trivial auf dem k-Vektorraum l. Wir sehen insbesondere, daß W'_k in eine direkte Summe

$$W'_k = \bigoplus_{j=1}^{s} V_k$$

zerfällt.

Es ergibt sich also die Formel

$$[l : k] \cdot \dim_l W_l = \dim_k W'_k = s \cdot \dim_k V_k = s \cdot r \cdot \dim_l W_l,$$

mit anderen Worten

$$r \cdot s = [l : k]. \tag{1}$$

Jetzt nutzen wir aus, daß W_l über einer abelschen und damit *auflösbaren* Erweiterung des Primkörpers $k_0 \subseteq k$ definiert ist†. Insbesondere ist W_l über einer abelschen Teilerweiterung m/k definiert. Aufgrund von Aufgabenteil (b) dürfen wir annehmen, daß Γ_W trivial auf m operiert, denn hiernach ist W_l über dem Fixkörper l^{Γ_W} definiert. Dies ist jedoch zugleich der *kleinste* Teilkörper von l/k, über welchem W_l definiert ist (andernfalls wäre Γ_W zu klein). Wir dürfen zusammenfassend also $l = m$, $\Gamma_W = 1$ und Γ abelsch annehmen. Insbesondere ist Γ dann auflösbar.

Damit läßt sich die Behauptung induktiv über die Länge n einer Kompositionreihe

$$1 = \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \cdots \subseteq \Gamma_n = \Gamma$$

beweisen: Der Fall $n = 0$ ist trivial. Gilt die Behauptung für $n - 1 \geq 0$, so gilt die Behauptung für alle Teilerweiterungen $l' \neq l$. Wir dürfen daher $k = l'$ annehmen. Dann ist die Erweiterung $[l : k]$ von Primzahlgrad und Formel (1) impliziert, daß $s = 1$, denn wegen $\Gamma_W = 1$ ist $r > 1$, mithin $r = [l : k]$, was zu zeigen war.

†Für k der Charakteristik $p > 0$ ergibt sich dies aus der Tatsache, daß jede endlichdimensionale Darstellung ist über einer endlichen algebraischen Erweiterung l_0 von k_0 definiert ist und jede solche Erweiterung bekanntlich zyklisch Galoissch ist. Im Fall von Charakteristik 0 zeigt man zunächst, daß jede solche Darstellung bereits über dem Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ definiert ist, welcher von den Werten des Charakters der Darstellung erzeugt wird. Wir wissen bereits, daß die Charaktere Werte in den $\#G$-ten Einheitswurzeln annehmen und diese erzeugen abelsche Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ (diese Erweiterungen enthalten sogar *alle* abelschen Erweiterungen von $\mathbb{Q}$). Vgl. Aufgabe 1 von Übungsblatt 11.