Lösung zur Aufgabe 4 des Übungsblattes 7.

Wir wollen zeigen, daß eine endliche Körpererweiterung L/K vom Grad n genau dann separabel ist, wenn es eine Körpererweiterung M/K gibt, so daß

$$M \otimes_K L \cong M^n.$$

Hierzu bezeichne $\overline{L}/K$ die normale Hülle von L/K. Wir wissen, daß L/K genau dann separabel ist, wenn $\#\operatorname{Hom}_K(L, \overline{L}) = n$.

Sei also L/K separabel. Dann wird L/K nach dem Satz vom primiten Element von einem $\alpha \in L$ erzeugt. Dies hat ein Minimalpolynom $\mu(X) \in K[X]$, welches über $\overline{L}$ in *paarweise verschiedene* Linearfaktoren

$$\mu(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i) \in \overline{L}[X].$$

zerfällt. Nun gilt nach dem chinesischen Restsatz

$$\overline{L}[X]/(\mu) \cong \prod_{i=1}^{n} \overline{L}[X]/(X - \alpha_i) \cong \overline{L}^n.$$

Andererseits haben wir

$$\overline{L} \otimes_K L \cong \overline{L} \otimes_K K[X]/(\mu) \cong \overline{L}[X]/(\mu).$$

Das zeigt die eine Implikation.

Es sei andererseits M/K eine Körpererweiterung mit $M \otimes_K L \cong M^n$. Dann haben wir zunächst eine natürliche Isomorphie

$$\operatorname{Hom}_K(L, M) \cong \operatorname{Hom}_M(M \otimes_K L, M),$$

denn $M \otimes_K \cdot$ ist andjungiert zum „Vergißfunktor" der Kategorie der M-Algebren in die Kategorie der K-Algebren. Es ergibt sich, daß

$$\operatorname{Hom}_K(L, M) \cong \operatorname{Hom}_M(M^n, M),$$

weswegen

$$\#\operatorname{Hom}_K(L, M) = \#\operatorname{Hom}_M(M^n, M) \geq n$$

und damit gilt sogar Gleichheit. Es gibt also n Einbettungen $L \to M$, welche notwendigerweise über die normale Hülle $\overline{L}$ faktorisieren. Wir haben also

$$\#\operatorname{Hom}_K(L, \overline{L}) = n$$

gezeigt, mithin ist L/K separabel.