Lösung zur Aufgabe 1 (a) des Übungsblattes 7.

Wir wollen zunächst das Tensorprodukt als Funktor verstehen. Sei R ein kommutativer Ring und seien M, N, M', N' beliebige R-Moduln und $f : M \to M'$ und $g : N \to N'$ jeweils R-linear. Die Abbildung

$$M \times N \to M' \otimes_R N',$$

$$(m, n) \mapsto f(m) \otimes_R g(m)$$

ist R-bilinear und induziert daher eine eindeutig bestimmte R-lineare Abbildung

$$f \otimes g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N',$$

$$m \otimes n \mapsto f(m) \otimes g(n).$$

Weiterhin ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \times \mathrm{Hom}_R(M', N') \to \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R M', N \otimes_R N'),$$

$$(f, g) \mapsto f \otimes g$$

R-bilinear, weswegen wir eine eindeutig bestimmte R-lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M', N') \to \mathrm{Hom}(M \otimes_R M', N \otimes_R N')$$

mit

$$f \otimes g \mapsto f \otimes g$$

erhalten. Diese ist im Allgemeinen jedoch weder injektiv, noch surjektiv und $f \otimes g$ verstehen wir im Folgenden stets als Element von $\mathrm{Hom}(M \otimes_R M', N \otimes_R N')$. Zugegebenermaßen ist diese Schreibkonvention nicht sehr glücklich, aber trotzdem üblich.
Im Sinne von

$$M \mapsto M \otimes_R N$$

und

$$f \mapsto f \otimes \mathbf{1}_N$$

ist $\cdot \otimes_R N$ ein Funktor $\underline{Mod}_R \to \underline{Mod}_R$.
Sei nun

$$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln. Wir zeigen, daß die Sequenz

$$A \otimes_R N \xrightarrow{\alpha \otimes \mathbf{1}_N} B \otimes_R N \xrightarrow{\beta \otimes \mathbf{1}_N} C \otimes_R N \longrightarrow 0$$

exakt ist. Mit anderen Worten, daß $\cdot \otimes_R N$ Kokerne auf Kokerne abbildet†.
Da $C \otimes_R N$ von der Menge

$$\{c \otimes n \mid c \in C, n \in N\} = \{f(b) \otimes n \mid b \in B, n \in N\}$$

erzeugt wird, ist $b \otimes \mathbf{1}_N$ surjektiv. Es bleibt die Exaktheit bei $B \otimes_R N$ zu zeigen. Wegen

$$(\beta \otimes \mathbf{1}_N) \circ (\alpha \otimes \mathbf{1}_N) = (\beta \circ \alpha) \otimes \mathbf{1}_N = 0$$

---

†Epimorphismen auf Epimorphismen reicht scheinbar leider nicht. Ein Gegenbeispiel wäre toll, kenne aber leider keines.

gilt

$$\mathrm{Bild}(\alpha \otimes \mathbf{1}_N) \subseteq \mathrm{Kern}(\beta \otimes \mathbf{1}_N).$$

Um die Gleichheit zu zeigen, betrachten wir die induzierte Abbildung

$$\overline{B} := (B \otimes_R N)/\,\mathrm{Bild}(\alpha \otimes \mathbf{1}_N) \xrightarrow{\overline{\beta\otimes\mathbf{1}_N}} C \otimes_R N.$$

Zu zeigen ist dann, daß diese bijektiv ist. Wir konstruieren nun die Umkehrabbildung $\phi : C \otimes_R N \to \overline{B}$.

Zunächst existiert zu jedem $c \in C$ ein $b \in B$ mit $\beta(b) = c$. Sei $b' \in B$ ein weiteres Urbild von c. Dann gilt für jedes $n \in N$

$$(\beta \otimes \mathbf{1}_N)(b \otimes n) = (\beta \otimes \mathbf{1}_N)(b' \otimes n) = c \otimes n.$$

Wir würden nun gerne

$$\phi(c \otimes n) = b \otimes n + \mathrm{Bild}(\alpha \otimes \mathbf{1}_N)$$

definieren und müssen hierzu einsehen, weshalb

$$b \otimes n + \mathrm{Bild}(\alpha \otimes \mathbf{1}_N) = b' \otimes n + \mathrm{Bild}(\alpha \otimes \mathbf{1}_N)$$

gilt. Das ist äquivalent zu

$$(b - b') \otimes n \in \mathrm{Bild}(\alpha \otimes \mathbf{1}_N).$$

Nun gilt $\beta(b - b') = 0$, weswegen es aufgrund unserer Voraussetzung ein $a \in A$ gibt mit $b - b' = \alpha(a)$. Dann erhalten wir

$$(b - b') \otimes n = \alpha(a) \otimes n \in \mathrm{Bild}(\alpha \otimes \mathbf{1}_N).$$

Wir dürfen also tatsächlich

$$\phi(c \otimes n) := b \otimes n + \mathrm{Bild}(\alpha \otimes \mathbf{1}_N)$$

definieren. Da diese Definition R-bilinear in c und n ist, erhalten wir auf diese Weise tatsächlich eine R-lineare Abbildung

$$\phi : C \otimes_R N \to \overline{B}.$$

Nach Definition ist damit

$$\phi \circ (\overline{\beta \otimes \mathbf{1}_N}) = \mathbf{1}_{\overline{B}},$$

denn auf der Teilmenge der Elemente der Form

$$b \otimes n + \mathrm{Bild}(\alpha \otimes \mathbf{1}_N)$$

induziert diese Abbildung die Identität und außerdem ist diese R-linear.

Der Nachweis von

$$(\overline{\beta \otimes \mathbf{1}_N}) \circ \phi = \mathbf{1}_{C \otimes_R N}$$

ergibt sich analog aus der Beobachtung, daß für $c \in C$ und $n \in N$ und entsprechendem $b \in B$ mit $\beta(b) = c$ per Definitionem

$$(\overline{\beta \otimes \mathbf{1}_N})(\phi(c \otimes n)) = (\beta \otimes \mathbf{1}_N)(b \otimes n) = (\beta(b) \otimes n) = c \otimes n$$

gilt. Das zeigt die Behauptung.

Konsequenzen

Sind $f : M \to N$ und $g : M' \to N'$ injektiv, so ist im Allgemeinen die Abbildung

$$f \otimes g : M \otimes_R M' \to N \otimes_R N'$$

nicht injektiv. Andererseits ist sie für *surjektive* f, g nach obiger Diskussion stets *surjektiv*. Um das einzusehen, betrachten wir das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R M' \arrow[r, "f\otimes \mathbf{1}_{M'}"] \arrow[d, equal] & N \otimes_R M' \arrow[d, "\mathbf{1}_N \otimes g"'] \\ M \otimes_R M' \arrow[r, "f\otimes g"] & N \otimes_R N' \end{tikzcd}$$

Wir haben bereits eingesehen, daß $f \otimes \mathbf{1}_{M'}$ und $\mathbf{1}_N \otimes g$ surjektiv sind, mithin ist es ihre Komposition ebenfalls. Das analoge Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R M' \arrow[r, "\mathbf{1}_M \otimes g"] \arrow[d, equal] & M \otimes_R N' \arrow[d, "f\otimes \mathbf{1}_{N'}"'] \\ M \otimes_R M' \arrow[r, "f\otimes g"] & N \otimes_R N' \end{tikzcd}$$

zeigt weiterhin, daß der Kern von $f \otimes g$ durch

$$\operatorname{Kern} f \otimes g = \operatorname{Bild}(i \otimes \mathbf{1}_{M'}) + \operatorname{Bild}(\mathbf{1}_M \otimes j)$$

gegeben ist, wobei

$$i : \operatorname{Kern} f \to M$$

und

$$j : \operatorname{Kern} g \to M'$$

die (Einbettungen der) Kerne von f und g bezeichnen.
Etwas übersichtlicher wird dieses Ergebnis an folgendem Beispiel. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale von R. Dann haben wir einen kanonischen Isomorphismus

$$(R/\mathfrak{a}) \otimes_R (R/\mathfrak{b}) \cong R/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}).$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß $R \otimes_R R \cong R$.