Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Ute Wolf

22. 10. 2007

Algebra I – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $(M, \cdot)$ eine Menge mit Verknüpfung. Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ definieren wir eine Verknüpfung $*$ durch

$$A * B := \{a \cdot b \,:\, a \in A, b \in B\}.$$

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

a) M kommutativ $\Rightarrow \mathcal{P}(M)$ kommutativ.

b) M Halbgruppe $\Rightarrow \mathcal{P}(M)$ Halbgruppe.

c) M Monoid $\Rightarrow \mathcal{P}(M)$ Monoid.

d) M Gruppe $\Rightarrow \mathcal{P}(M)$ Gruppe.

Bestimme in c) und d) (im Falle der Existenz) das neutrale Element, die invertierbaren Elemente und deren Inversen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
In einem Monoid M mit neutralem Element 1 gelte $x^2 = 1$ für alle $x \in M$. Zeige, dass M eine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Sei $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ ein reelles, normiertes Polynom vom Grad 3. Zeige, dass f durch die Substitution $X = Y - \frac{a}{3}$ in ein reelles Polynom der Form $Y^3 + pY + q$ übergeht.

b) Sei $g = Y^3 + pY + q$ ein reelles Polynom von der Form wie in Teil a). Es gelte $D := -4p^3 - 27q^2 < 0$. Weiter seien $\zeta := e^{2\pi i/3} \in \mathbb{C}$ und

$$u := \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot (-q + \frac{1}{9} \cdot \sqrt{-3D})}, \quad v := \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot (-q - \frac{1}{9} \cdot \sqrt{-3D})}.$$

Zeige, dass dann über $\mathbb{C}$ gilt:

$$Y^3 + pY + q = (Y - (u + v)) \cdot (Y - (\zeta u + \zeta^2 v)) \cdot (Y - (\zeta^2 u + \zeta v))$$

Abgabe bis spätestens Montag, 29. 10. 2007, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.