Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Ute Wolf 29. 10. 2007

Algebra I – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei S eine Menge. Wir definieren rekursiv

$$F_1(S) := S,$$
$$F_n(S) := \dot{\bigcup_{1\leq i\leq n-1}} F_i(S) \times F_{n-i}(S).$$

Die disjunkte Vereinigung $F(S) := \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} F_n(S)$ dieser Mengen wird mit der Verknüpfung

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N}\ \forall\, x \in F_n(S), y \in F_m(S) :\ x * y := (x, y) \in F_{n+m}(S)$$

zu einem Magma. $F(S)$ heißt *freies Magma* über S.

a) Zeige, dass es zu jedem Magma M und jeder Abbildung $\varphi : S \to M$ genau einen Magmahomomorphismus $\Phi : F(S) \to M$ gibt mit $\Phi|_S = \varphi$.

b) Sei nun $S = \{s\}$ eine einelementige Menge. Wie viele Elemente haben die Mengen $F_1(S), \ldots, F_6(S)$? Liste alle Elemente von $F_5(S)$ auf.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe. $T(G)$ bezeichne die Menge aller Elemente endlicher Ordnung von G. Zeige:

a) Ist G abelsch, so ist $T(G)$ eine Untergruppe von G.

b) Ist $T(G)$ eine Untergruppe von G, so ist $T(G)$ sogar ein Normalteiler in G.

c) Es gibt eine Gruppe G, für die $T(G)$ keine Untergruppe ist.

$T(G)$ heißt *Torsionsanteil* von G. G heißt *torsionsfrei*, wenn $T(G) = \{1\}$ gilt.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Seien G eine Gruppe und U, V Untergruppen von G. Zeige:

a) $UV \leq G \Leftrightarrow UV = VU$

b) $U \cup V \leq G \Leftrightarrow U \subseteq V$ oder $V \subseteq U$

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \,:\, \det(A) \neq 0\}$. Wir definieren die Untergruppen Q und D von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ durch

$$Q := \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rangle,$$
$$D := \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

a) Bestimme alle Elemente von Q und D und ihre jeweilige Ordnung.

b) Zeige, dass Q und D nicht abelsch und nicht zueinander isomorph sind.

Im folgenden wollen wir (bis auf Isomorphie) alle nichtabelschen Gruppen mit 8 Elementen kennenlernen. (Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir auch lernen, wie man die abelschen Gruppen von Ordnung 8 bestimmt.) Sei dazu G eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8. Zeige:

c) In G gibt es ein Element a der Ordnung 4.

d) Für jedes $b \in G \setminus \langle a \rangle$ gilt $b^2 = 1$ oder $b^2 = a^2$.
Für jedes $b \in G \setminus \langle a \rangle$ gilt $ba = a^3 b$.

e) G ist isomorph zu Q oder zu D.

Abgabe bis spätestens Montag, 5. 11. 2007, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.