Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Ute Wolf

5. 11. 2007

Algebra I – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien G eine Gruppe, $H \leq G$ eine Untergruppe von G und $M, N \trianglelefteq G$ Normalteiler von G mit $M \subseteq N$. Zeige:

a) $H/(H \cap N) \cong HN/N$

b) $(G/M)/(N/M) \cong G/N$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien H, N Gruppen und $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Auf der Menge $G := N \times H$ definieren wir eine Verknüpfung $\cdot$ durch

$$(n_1, h_1) \cdot (n_2, h_2) := (n_1\varphi(h_1)(n_2), h_1h_2),$$

wobei jeweils die Verknüpfungen in N und H verwendet werden.

a) Zeige, dass $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist, die $N \times \{1_H\}$ als Normalteiler und $\{1_N\} \times H$ als Untergruppe enthält.

b) Zeige, dass $G/(N \times \{1\}) \cong H$ gilt.

Bemerkung: Die Gruppe $(G, \cdot)$ wird mit $N \rtimes_\varphi H$ oder einfach mit $N \rtimes H$ bezeichnet und heißt *semidirektes Produkt* von H mit N.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Eine *kurze exakte Sequenz* von Gruppen ist eine Folge

$$1 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 1$$

von Gruppen und Gruppenhomomorphismen, wobei f injektiv und g surjektiv ist und $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(g)$ gilt. Zeige:

a) Ist $1 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 1$ eine kurze exakte Sequenz *endlicher* Gruppen, so gilt die Gleichheit $|B| = |A| \cdot |C|$.

b) Zeige: Ist $1 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 1$ eine kurze exakte Sequenz von (beliebigen) Gruppen und gibt es einen Homomorphismus $s : C \to B$ mit $g \circ s = \mathrm{id}_C$ (man sagt dann, dass die Sequenz *spaltet*), so gibt es einen Homomorphismus $\varphi : C \to \mathrm{Aut}(A)$ mit $A \rtimes_\varphi C \cong B$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien G eine Gruppe und $Z(G) := \{g \in G \mid \forall\, x \in G: \; xg = gx\}$ das *Zentrum* von G. Zeige:

a) $Z(G)$ ist eine abelsche Untergruppe und sogar ein Normalteiler von G.

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

   (i) G ist abelsch.
   (ii) $Z(G) = G$
   (iii) $G/Z(G)$ ist zyklisch.

c) Der Index von $Z(G)$ in G ist niemals eine Primzahl.

d) Bestimme für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ das Zentrum von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Abgabe bis spätestens Montag, 12. 11. 2007, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.