Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Ute Wolf

12. 11. 2007

Algebra I – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Die von $\{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\}$ erzeugte Untergruppe heißt *Kommutatoruntergruppe* von G und wird mit $K(G)$ oder $[G, G]$ bezeichnet. (Für $x, y \in G$ schreibt man auch $xyx^{-1}y^{-1} =: [x, y]$.) Zeige:

a) $K(G)$ ist ein Normalteiler in G.

b) Für einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ ist G/N genau dann abelsch, wenn $K(G) \subseteq N$ gilt. Insbesondere ist $G^{ab} := G/K(G)$ abelsch.

c) UAE der Kommutatorfaktorgruppe:

Sei $p : G \to G^{ab}$ die kanonische Projektion. Dann gibt es für jede abelsche Gruppe H und jeden Homomorphismus $\Phi : G \to H$ genau einen Homomorphismus $\overline{\Phi} : G^{ab} \to H$ mit $\overline{\Phi} \circ p = \Phi$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei G eine endliche, abelsche Gruppe. Zeige:

a) Zu jeder Untergruppe $H \leq G$ gibt es eine Untergruppe $U \leq G$ mit $U \cong G/H$.

b) Zu jedem $x \in G$ mit maximaler Ordnung gibt es eine Untergruppe $U \leq G$ mit $G \cong \langle x \rangle \times U$.

Aufgabe 3 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)
Berechne die Elementarteiler der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ -2 & 9 & 11 & 13 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Um zwei Zusatzpunkte zu erhalten, berechne die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$Ax = \begin{pmatrix} 4\alpha \\ -7\alpha - 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

für $x \in \mathbb{Z}^5$ in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)
Sei F die freie Gruppe mit den zwei Erzeugern x, y. Finde eine freie Untergruppe von F vom Rang 3. Wenn Du für diese auch den Index bestimmst, erhältst Du zwei Zusatzpunkte.

Abgabe bis spätestens Montag, 19. 11. 2007, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.