Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Ute Wolf

19. 11. 2007

Algebra I – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien G eine Gruppe und $X \subseteq G$. Das *Normalteilererzeugnis* von X ist

$$\langle X \rangle_{\text{normal}} := \bigcap_{X \subseteq N \trianglelefteq G} N.$$

Zeige:

a) $\langle X \rangle_{\text{normal}}$ ist ein Normalteiler von G.

b) $\langle X \rangle_{\text{normal}} = \{g_1 x_1^{\varepsilon_1} g_1^{-1} \cdot \ldots \cdot g_r x_r^{\varepsilon_r} g_r^{-1} \,:\, r \in \mathbb{N},\, g_i \in G,\, x_i \in X,\, \varepsilon_i = \pm 1\}$

c) Seien $G = F(x, y)$ die freie Gruppe vom Rang 2 und $X := \{xyx^{-1}y^{-1}\}$. Zeige die Gleichheit $\langle X \rangle_{\text{normal}} = K(G)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Dann gibt es eine freie Gruppe F (mit Basis X) und einen surjektiven Homomorphismus $\Phi : F \to G$, und es gilt $G \cong F/\operatorname{Kern}(\Phi)$. Ist $R \subseteq \operatorname{Kern}(\Phi)$ mit $\operatorname{Kern}(\Phi) = \langle R \rangle_{\text{normal}}$, so schreibt man auch $G = \langle X \mid R \rangle$ und nennt diesen Ausdruck eine *Präsentation* von G. Zeige:

a) Ist $G = \langle X \mid R \rangle$ eine Präsentation von G, H eine weitere Gruppe und $f : X \to H$ eine Abbildung mit homomorpher Fortsetzung $\hat{f} : F \to H$, und gilt $\hat{f}(w) = 1$ für alle $w \in R$, so gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : G \to H$ mit $\varphi \circ \Phi = \hat{f}$.

b) Die Gruppe Q aus Aufgabe 4 von Blatt 2 hat die Präsentation $\langle A, B \mid A^4 = 1, B^2 = A^2, AB = B^3 A \rangle$.

c) Sind $I, J \in Q$ von Ordnung 4 mit $I \neq J$ und $I \neq J^{-1}$, so gibt es einen Automorphismus von Q, der I auf A und J auf B abbildet.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zu einer Gruppe G sei $G^{ab} := G/K(G)$ die *Abelisierung* von G (vgl. Blatt 4, Aufgabe 1).

a) Mache die Zuordnung $G \mapsto G^{ab}$ zu einem Funktor von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der abelschen Gruppen. Finde einen injektiven Gruppenhomomorphismus, dessen Bild unter diesem Funktor nicht mehr injektiv ist.

b) Sei nun G eine feste Gruppe. Finde ein darstellendes Objekt für den Funktor $H \mapsto \operatorname{Hom}(G, H)$ von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der Mengen.

Aufgabe 4 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)
Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $A_1, A_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Ein *Koprodukt* von A_1 und A_2 in $\mathcal{C}$ ist ein Tupel (X, s_1, s_2) mit einem Objekt $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und Morphismen $s_1 : A_1 \to X$, $s_2 : A_2 \to X$, für die gilt:

> Für jedes Objekt $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ und alle Morphismen $f_1 : A_1 \to B$, $f_2 : A_2 \to B$ gibt es genau einen Morphismus $f : X \to B$ mit $f_i = f \circ s_i$ $(i = 1, 2)$.

a) Zeige: Das Koprodukt ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie, das heißt: Sind (X, s_1, s_2) und (Y, t_1, t_2) Koprodukte von A_1 und A_2, so gibt es einen eindeutigen Isomorphismus $\Phi : X \to Y$ mit $\Phi \circ s_i = t_i$ $(i = 1, 2)$.

b) Bestimme die Koprodukte in der Kategorie der abelschen Gruppen.

c) Zeige: Das Koprodukt von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$ in der Kategorie der abelschen Gruppen ist *kein* Koprodukt von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$ in der Kategorie der Gruppen.

d) Berechne für 2 Zusatzpunkte das Koprodukt von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}$ in der Kategorie der Gruppen.

Abgabe bis spätestens Montag, 26. 11. 2007, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.