

Algebra I – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Zeige:

- Für jede Gruppe G der Ordnung p^r ($r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$) gilt $Z(G) \neq \{1\}$.
- Jede Gruppe der Ordnung p^2 ist abelsch.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Operiert eine Gruppe G auf einer Menge X , so heißt $x \in X$ ein *Fixpunkt*, wenn $Gx = \{x\}$ gilt. Zeige:

- Operiert eine Gruppe der Ordnung 55 auf einer Menge von 39 Elementen, so gibt es mindestens einen Fixpunkt.
- Operiert eine Gruppe der Ordnung 55 auf einer Menge von 18 Elementen, so gibt es mindestens zwei Fixpunkte.
- Ist k kleiner als der kleinste Primteiler von n und operiert eine Gruppe der Ordnung n auf einer Menge der Ordnung k , so ist die Operation trivial.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeige: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung 24.

Erinnerung: Eine Gruppe G heißt *einfach*, wenn sie nur die Normalteiler $\{1\}$ und G besitzt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

- Wie viele Elemente der Ordnung 7 gibt es in einer einfachen Gruppe der Ordnung 168?

Seien nun \mathbb{F}_7 ein Körper mit 7 Elementen und $G := \text{PSL}_2(\mathbb{F}_7) := \text{SL}_2(\mathbb{F}_7)/\{1, -1\}$.

- Wie viele Elemente hat G ?
- Welche Struktur haben die 2-Sylowgruppen von G ? Sind sie kommutativ? Sind sie isomorph zu D oder Q aus Aufgabe 4 von Blatt 2?

Abgabe bis spätestens Montag, 3.12.2007, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.