UNIVERSITÄT KARLSRUHE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
PROF. DR. F. HERRLICH
UTE WOLF

3. 12. 2007

Algebra I – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Bestimme eine Kompositionsreihe von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

b) Zeige unter Benutzung des Satzes von Jordan-Hölder, dass die Primfaktorzerlegung in $\mathbb{N}$ eindeutig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Für eine Gruppe G sei $K(G)$ die Kommutatoruntergruppe von G, vgl. Blatt 4, Aufgabe 1. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir induktiv

$$K^0(G) := G,$$
$$K^{n+1}(G) := K(K^n(G)).$$

Zeige, dass G genau dann auflösbar ist, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $K^n(G) = \{1\}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien $\mathrm{GL}_n(K)$ die Gruppe der regulären $(n \times n)$-Matrizen über einem Körper K, $B \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen und $N \subseteq B$ die Untergruppe derjenigen Matrizen, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen alle 1 sind. Zeige:

a) N ist ein Normalteiler von B.

b) B/N ist isomorph zur Gruppe $D \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren Diagonalmatrizen und daher auflösbar.

c) Ist $G^{(i)} \subseteq N$ die Untergruppe derjenigen Matrizen, bei denen in den ersten i Nebendiagonalen über der Hauptdiagonalen alle Einträge 0 sind, so gilt $K^i(N) \subseteq G^{(i)}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ (vgl. Aufgabe 2). Folgere, dass N auflösbar ist.

d) B ist auflösbar.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien p, q Primzahlen. Zeige:

a) Jede Gruppe der Ordnung p^n mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist auflösbar.

b) Jede Gruppe der Ordnung $p^2 q$ ist auflösbar.

c) Jede Gruppe der Ordnung 700 ist auflösbar.

Abgabe bis spätestens Montag, 10. 12. 2007, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.