Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Ute Wolf

10. 12. 2007

Algebra I – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Seien G eine endliche Gruppe und R ein Ring mit Eins. Auf $R[G] := \mathrm{Abb}(G, R)$ definieren wir zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ wie folgt:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)(g) &:= \alpha(g)+\beta(g)\\ (\alpha\cdot\beta)(g) &:= \sum_{g_1,g_2\in G, g_1g_2=g} \alpha(g_1)\cdot\beta(g_2)\end{aligned}$$

Für $\alpha : G \to R$ mit $\alpha(g) = r$ und $\alpha(h) = 0$ $(h \neq g)$ schreiben wir auch $\alpha = rg$.

a) Zeige: $R[G]$ ist ein Ring mit Eins.

b) Ist $R[G]$ kommutativ?

c) Welche Charakteristik hat $R[G]$?

d) Bestimme für $R = \mathbb{Z}$ und $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Einheiten von $R[G]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Für $\theta \in \mathbb{C}$ sei $M_\theta := \{a+b\theta \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeige die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

(i) M_θ ist ein Teilring von $\mathbb{C}$.

(ii) $\theta^2 \in M_\theta$

(iii) $\theta \in \{\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2} \,:\, a, b \in \mathbb{Z}\}$

Bestimme für $\theta = i$ die Einheiten von M_θ.

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Zeige: Jeder Integritätsbereich mit nur endlich vielen Idealen ist ein Körper.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es sei R ein kommutativer Ring. Für ein Ideal $I \trianglelefteq R$ definieren wir

$$\sqrt{I} := \{a \in R \mid \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N}_{\geq 1} \text{ mit } a^n \in I\}.$$

a) Zeige, dass auch $\sqrt{I}$ ein Ideal von R ist.

b) Bestimme für $R = \mathbb{Z}$ und $I = n\mathbb{Z}$ das Ideal $\sqrt{I}$.

Bemerkung: $\sqrt{I}$ heißt das *Radikal* von I.

Abgabe bis spätestens Montag, 17. 12. 2007, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.