

## Algebra I – Übungsblatt 9

### Aufgabe 1 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte)

Sei  $\mathbb{Z}[i] := \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ . Nach Blatt 8, Aufgabe 2 ist  $\mathbb{Z}[i]$  ein Teilring von  $\mathbb{C}$ .

- Zeige:  $\mathbb{Z}[i]$  ist ein euklidischer Ring.
- Finde Primfaktorzerlegungen von 2, 3 und 4 in  $\mathbb{Z}[i]$ .
- Du erhältst zwei Zusatzpunkte, wenn du für jedes  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$  eine Primfaktorzerlegung von  $n$  in  $\mathbb{Z}[i]$  angibst.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $J = J(R)$  der Schnitt aller maximalen Ideale von  $R$ .

- Zeige: Sind  $x \in R$  und  $n \in \mathbb{N}$  mit  $x^n \in J$ , so ist auch  $x \in J$ .  
*Bemerkung:* Ideale mit dieser Eigenschaft heißen *Radikalideale*.
- Zeige, dass für jedes  $x \in R$  gilt:  
 $x \in J \Leftrightarrow \forall a \in R : 1 + ax \in R^\times$
- Finde einen Ring  $R$  mit  $J(R) \neq \{0\}$ .

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler der Polynome

$$\begin{aligned} f &= X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1, \\ g &= X^4 - X^3 - X + 1 \end{aligned}$$

sowohl in  $\mathbb{Q}[X]$  als auch in  $\mathbb{F}_2[X]$  und stelle ihn jeweils als Linearkombination von  $f$  und  $g$  dar.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Herr Meier wurde am 10.7.2007 80 Jahre alt und wollte aus diesem Anlass mit der ganzen Familie feiern. Leider machten ihm die Kinder einen Strich durch die Rechnung: Sohn Herbert ist beruflich viel unterwegs und kann generell nur montags. Tochter Sabine ist in einer gemeinnützigen Organisation tätig und kann generell nur jeden fünften Tag, erstmals am 12.7.2007. Die Enkel Minnie und Winnie sind im Sportverein aktiv und haben daher nur an jedem dritten Tag Zeit, auch erstmals am 12.7.2007. Und dann gibt es noch Herrn Meiers Bruder, der im Ausland wohnt und wegen schlechter Verbindungen nur jeden vierten Tag dasein kann. Sein Flieger startet erstmals am 13.7.2007.

Da Herr Meier den chinesischen Restsatz kennt, weiß er, dass er unter diesen Nebenbedingungen die komplette Familie höchstens einmal im Jahr zusammenbringen kann. Daher beschließt er, am nächstmöglichen Termin, an dem alle können, die Feier nachzuholen. An welchem Tag wird das sein?

Das Algebra-Team wünscht allen Teilnehmern der Vorlesung ein frohes Weihnachtsfest und ein erfolgreiches Jahr 2008.

**Abgabe** bis spätestens Montag, 7. 1. 2008, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.