Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Ute Wolf

7. 1. 2008

Algebra I – Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Ein Ring R heißt *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal hat. Zeige: Sind R ein kommutativer Ring mit Eins und $P \trianglelefteq R$ ein Primideal, so ist R_P ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $m_P := P \cdot R_P$, und es gilt $R_P/m_P \cong \mathrm{Quot}(R/P)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom. Zeige:

a) Ist $g \in \mathbb{Q}[X]$ ein normiertes Polynom, das f in $\mathbb{Q}[X]$ teilt, so ist schon $g \in \mathbb{Z}[X]$.

b) Ist $x \in \mathbb{Q}$ mit $f(x) = 0$, so gilt schon $x \in \mathbb{Z}$ und x ist ein Teiler von a_0.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeige die Irreduzibilität der folgenden Polynome:

$$f = X^4 + 6X^3 + 5X^2 + 7X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

$$g = X^{2^m} + 1 \in \mathbb{Q}[X] \quad (m \in \mathbb{N})$$

$$h = Y^2 - X^3 + X \in \mathbb{Q}[X, Y]$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Zeige: Ist K ein Körper, so ist der Ring $K[X, Y]/(X^2 - Y^3)$ nicht faktoriell.
Hinweis: Prüfe, ob die Restklassen $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ irreduzibel bzw. prim sind.

Abgabe bis spätestens Montag, 14. 1. 2008, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.