Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Ute Wolf

14. 1. 2008

Algebra I – Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Zeige: Eine Körpererweiterung L/K ist genau dann algebraisch, wenn jeder Zwischenring R von L/K ein Körper ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Bestimme von den folgenden Elementen in $\mathbb{C}$ jeweils das Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$:

$$\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$$

$$\zeta_7 = e^{2\pi i/7}$$

$$\zeta_7 + \overline{\zeta_7}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien K ein Körper und $f, g \in K[X]$ irreduzibel und von teilerfremdem Grad. Sei weiter α eine Nullstelle von f in einem Erweiterungskörper L von K.
Zeige: g ist in $K(\alpha)[X]$ irreduzibel.

Hinweis: Es darf angenommen werden, dass auch g eine Nullstelle in L hat (warum?).

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei K ein Körper, in dem -1 kein Quadrat ist. Setze

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in K \right\} \subseteq K^{2\times 2}.$$

Zeige:

a) L ist ein Körper.

b) K kann als Teilkörper von L aufgefasst werden.

c) Es gibt ein $I \in L$ mit $I^2 = -1$.

d) $L = K(I)$

e) $[L : K] = 2$

Abgabe bis spätestens Montag, 21. 1. 2008, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.