Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Ute Wolf

21. 1. 2008

Algebra I – Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Bestimme den Zerfällungskörper und dessen Grad von folgenden Polynomen über $\mathbb{Q}$:

$$f = X^4 + X^2 + 1$$

$$g = (X^3 - 2)(X^2 - 3)$$

$$h = X^4 - 2$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeige: Eine Körpererweiterung L/K ist genau dann algebraisch, wenn für jeden Zwischenkörper E und jeden Homomorphismus $\sigma : E \to E$ mit $\sigma|_K = \mathrm{id}$ gilt, dass σ ein Automorphismus von E ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien K ein Körper, L ein Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[X]$ und $\overline{L}$ ein algebraischer Abschluss von L. Zeige:

a) Für jeden K-Homomorphismus $\sigma : L \to \overline{L}$ gilt $\sigma(L) = L$.

b) Ist $g \in K[X]$ irreduzibel und hat g in L eine Nullstelle, so liegen alle Nullstellen von g in L.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Seien $p_1, \ldots, p_r$ paarweise verschiedene Primzahlen und $K := \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_r})$. Zeige:

   (i) $[K : \mathbb{Q}] = 2^r$

   (ii) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(K, \overline{\mathbb{Q}}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$

b) Sei $\hat{K} := \mathbb{Q}(\{\sqrt{p} : p \text{ Primzahl}\})$. Zeige:
   $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\hat{K}, \overline{\mathbb{Q}})$ ist überabzählbar.

Abgabe bis spätestens Montag, 28. 1. 2008, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.