Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Ute Wolf

28. 1. 2008

Algebra I – Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Seien K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und L/K eine Körpererweiterung. Weiter seien $\alpha, \beta \in L$ mit $\alpha^p, \beta^p \in K$ und $[K(\alpha, \beta) : K] = p^2$. Zeige:

a) $[K(\alpha, \beta) : K]_s = 1$

b) $K(\alpha, \beta)/K$ ist nicht einfach.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Seien K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $\sigma : K \to K$, $x \mapsto x^p$ der Frobenius-Homomorphismus.

a) Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

   (i) Jede algebraische Körpererweiterung von K ist separabel. (Ein solcher Körper K heißt *vollkommen*.)

   (ii) σ ist surjektiv.

b) Finde einen unendlichen, vollkommenen Körper der Charakteristik $p > 0$ und einen Körper der Charakteristik $p > 0$, der nicht vollkommen ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Seien K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, $a \in K$ und $f := X^p - X - a \in K[X]$. Zeige:

a) f ist separabel.

b) Hat f eine Nullstelle in K, so liegen alle Nullstellen von f in K.

c) Hat f keine Nullstelle in K, so ist f irreduzibel über K.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Sei $f := (X^2 - 2)(X^2 - 3)(X^2 - 6)$.

a) Zeige: f hat über $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle, aber über jedem $\mathbb{F}_p$, p Primzahl, mindestens eine.

b) Bestimme den Zerfällungskörper $Z_K(f)$ von f über jedem der Körper $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_p$, p Primzahl.

c) Ist $Z_K(f)$ separabel?

d) Bestimme für jedes K ein primitives Element von $Z_K(f)/K$.

Abgabe bis spätestens Montag, 4. 2. 2008, um 13.00 Uhr in den dafür vorgesehenen Kasten bei Zimmer 308 im Mathebau.