Universität Karlsruhe
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Ute Wolf

11. 2. 2008

Algebra I – Übungsblatt 15

Aufgabe 1
Es seien K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und L/K eine Galois-Erweiterung mit zyklischer Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/K) = \langle\sigma\rangle$ der Ordnung p.

a) Zeige, dass die Abbildung $s : L \to L$, $\alpha \mapsto \alpha - \sigma(\alpha)$ nilpotent ist, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s^n = 0$.

b) Gib ein Element $\beta \in L$ an mit $\beta \notin \mathrm{Kern}(s)$ und $\beta \in \mathrm{Kern}(s^2)$.

c) Zeige, dass für ein β wie in Aufgabenteil b) gilt: $k := \sigma(\beta) - \beta$ liegt in K und $\gamma := k^{-1}\beta$ ist Nullstelle eines Polynoms $f := X^p - X - d \in K[X]$.

d) Ist f das Minimalpolynom von γ?

Aufgabe 2
Zeige, dass es zu jeder endlichen Gruppe G eine galoissche Körpererweiterung L/K gibt mit $\mathrm{Gal}(L/K) \cong G$.

Hinweis: Gemäß Aufgabe 3 auf Blatt 14 sollte man sich zunächst einen Körper L wählen, auf dem G durch Automorphismen operiert.

Aufgabe 3
Berechne $\mathrm{Gal}(f)$ für $f = X^4 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Ist die Gleichung $f(X) = 0$ durch Radikale auflösbar?

Aufgabe 4
Seien L der Zerfällungskörper des irreduziblen Polynoms $f = X^4 - 2aX^2 + c$ über $\mathbb{Q}$ und $M := \mathbb{Q}(\sqrt{a^2 - c})$. Zeige:

a) Es ist genau dann $[L : \mathbb{Q}] = 4$, wenn $\sqrt{c} \in M$ gilt.

b) Ist $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}$, so ist $\mathrm{Gal}(f) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

c) Ist $\sqrt{c} \in M \setminus \mathbb{Q}$, so ist $\mathrm{Gal}(f) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Aufgabe 5
$\mathbb{R}$ hat keine echte Körpererweiterung von ungeradem Grad.
$\mathbb{C}$ hat keine Körpererweiterung vom Grad 2.
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Aufgabe 6
Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Für $\alpha \in L$ sei $\Phi : L \to L$ gegeben durch $\Phi(x) := \alpha x$.

a) Φ ist K-linear.

b) Das Minimalpolynom von Φ ist das Minimalpolynom von α.

c) Berechne Spur(Φ), det(Φ), eine Basis von L sowie eine Abbildungsmatrix von Φ.

d) Wie verhalten sich charakteristisches Polynom und Minimalpolynom von Φ zueinander?

Diesmal keine Abgabe.