Lösungsvorschlag zu Blatt 2, Aufgabe 4e)

Gegeben sind die Gruppen

$$Q := \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \rangle =: \langle A, B \rangle = \{1, A, A^2, A^3, B, AB, A^2B, A^3B\},$$
$$D := \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle =: \langle A, C \rangle = \{1, A, A^2, A^3, C, AC, A^2C, A^3C\}.$$

Es gilt $A^4 = 1$, $B^2 = A^2$, $C^2 = 1$, $BA = A^3B$ und $CA = A^3C$.

Aufgabe 4e):
Gegeben sei eine nichtabelsche Gruppe G der Ordnung 8. Wir wissen bereits, dass es ein $a \in G$ der Ordnung 4 gibt und dass für jedes $b \in G \setminus \langle a \rangle$ gilt: $b^2 \in \{1, a^2\}$ und $ba = a^3b$. Zeige, dass G zu Q oder zu D isomorph ist.

Lösung:
Sei $b \in G \setminus \langle a \rangle$ fest.
$\Rightarrow G = \langle a, b \rangle = \{a^{n_1}b^{m_1} \cdot \ldots \cdot a^{n_r}b^{m_r} \ : \ r \in \mathbb{N}, n_i, m_i \in \mathbb{Z}\} \overset{ba=a^3b}{=} \{a^n b^m \ : \ n, m \in \mathbb{Z}\}$

(1) 1. Fall: $b^2 = 1$:
  Definiere $\Phi : G \to D$, $a^n b^m \mapsto A^n C^m$.

  - Φ ist wohldefiniert:
    Seien $n, m, i, j \in \mathbb{Z}$ mit $a^n b^m = a^i b^j$.
    $\Rightarrow a^{n-i} = b^{j-m} \Rightarrow b^{j-m} \in \langle a \rangle \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : \ j - m = 2k$
    $\Rightarrow a^{n-i} = b^{j-m} = b^{2k} = 1 \Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{Z} : \ n - i = 4l$
    $\Rightarrow A^n C^m = A^{4l+i} C^{j-2k} = A^{4l} A^i C^j C^{-2k} = 1 \cdot A^i \cdot C^j \cdot 1 = A^i C^j$
  - Φ ist ein Homomorphismus:
    $\forall\, n, m, i, j \in \mathbb{Z}$:
    $$\Phi(a^n b^m \cdot a^i b^j) \overset{ba=a^3b}{=} \Phi(a^n a^{i \cdot 3^m} b^m b^j) = \Phi(a^{n+i\cdot 3^m} b^{m+j}) = A^{n+i\cdot 3^m} C^{m+j}$$
    $$= A^n A^{i\cdot 3^m} C^m C^j \overset{CA=A^3C}{=} A^n C^m A^i C^j = \Phi(a^n b^m) \cdot \Phi(a^i b^j)$$
  - Wegen $D = \langle A, C \rangle = \langle \Phi(a), \Phi(b) \rangle$ ist Φ surjektiv. Wegen $|G| = |D| = 8$ ist jede surjektive Abbildung $G \to D$ auch injektiv[1].
    $\Rightarrow \Phi$ ist ein Isomorphismus.

(2) 2. Fall: $b^2 = a^2$:
  Definiere $\Phi : G \to Q$, $a^n b^m \mapsto A^n B^m$.
  Der Beweis, dass Φ ein Isomorphismus ist, funktioniert genau wie in Fall 1.

Zusatz:
Die Gruppe G wird von den Elementen a, b erzeugt, und für diese gelten die *Relationen* $a^4 = b^2 = 1$, $ba = a^3b$ (im Fall 1) bzw. $a^4 = 1$, $b^2 = a^2$, $ba = a^3b$ (im Fall 2). Dadurch ist G schon eindeutig bestimmt.

Um nun einen Homomorphismus Φ von G in eine beliebige Gruppe H zu definieren, reicht es, Φ auf den Erzeugern zu definieren und die gegebenen Relationen in H nachzurechnen. In unserer Situation müssen wir also nur zeigen, dass $\Phi(a)^4 = \Phi(b)^2 = 1$, $\Phi(b)\Phi(a) = \Phi(a)^3\Phi(b)$ (bzw. $\Phi(a)^4 = 1$, $\Phi(b)^2 = \Phi(a)^2$, $\Phi(b)\Phi(a) = \Phi(a)^3\Phi(b)$ in Fall 2) gilt.

[1] Eine solche Aussage gilt natürlich nur für endliche Mengen.