Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

02.11.2012

Algebra – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien R, S kommutative Ringe mit Eins und sei $\phi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Urbilder von Primidealen sind wieder Primideale.

(b) Die Aussage in (a) gilt im Allgemeinen nicht für maximale Ideale.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien R ein kommutativer Ring mit Eins und $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie:

(a) I ist genau dann ein Primideal, wenn R/I nullteilerfrei ist.

(b) I ist genau dann maximal, wenn R/I ein Körper ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

(a) Zeigen Sie, dass die Einheitengruppe des Ringes der formalen Potenzreihen $R[[X]] := \{f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ aus den Elementen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ mit $a_0 \in R^\times$ besteht.

(b) Berechnen Sie für $a_0 \in R^\times$ und $a_1 \in R$ das Inverse zu $a_0 + a_1 X$ in $R[[X]]$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, für das gilt: p teilt $a_0, \ldots, a_{n-1}$, aber p ist kein Teiler von a_n und p^2 kein Teiler von a_0. Zeigen Sie: Es gibt keine zwei Polynome $g, h \in \mathbb{Z}[X]$ mit Grad größer 0, sodass $f = g \cdot h$ ist.
Zusatzfrage: Ist f irreduzibel als Element von $\mathbb{Q}[X]$?

Abgabe: Bis Donnerstag, den 08.11.2012, in den dafür vorgesehenen gelben Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.