Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

01.02.2013

Algebra – Übungsblatt 14

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Nach der Vorlesung ist jedes Element $x \in \mathbb{Q}_p$ eindeutig darstellbar als konvergente Reihe $x = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n p^n$ mit $a_n \in \{0, \cdots, p-1\}, m \in \mathbb{N}_0$.
Zeigen Sie, dass x genau dann in $\mathbb{Q}$ ist, wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ periodisch wird, d.h., wenn es $n_0, d \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a_n = a_{n+d}$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei $\mathbb{Z}[[X]]$ der Ring der formalen Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ mit $a_n \in \mathbb{Z}$. Betrachten Sie die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z}[[X]] \to \mathbb{Z}_p$ definiert durch
$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$. Zeigen Sie:

(a) φ ist ein Homomorphismus von Ringen mit 1.

(b) φ ist surjektiv mit Kern $(X - p)$ und es gilt: $\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}[[X]]/(X - p)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen Sie das Irreduzibilitätskriterium von Eisenstein für p-adische Zahlen:
Sei das Polynom $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}_p[X]$, sodass

- $a_i \equiv 0 \mod p$ für $0 \leq i \leq n-1$,
- $a_0 \not\equiv 0 \mod p^2$ und
- $a_n \not\equiv 0 \mod p$.

Dann ist f irreduzibel über $\mathbb{Z}_p$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien k ein Körper und $p(X) \in k[X]$ ein normiertes Polynom mit der Primzerlegung $p(X) = \prod_{i=1}^{n} p_i(X)^{e_i}$, $p_i(X) \in k[X]$ und $e_i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit dem chinesischen Restsatz, dass dann gilt:

$$k[X]/(p(X)) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} k[X]/(p_i(X))^{e_i}.$$

Abgabe: Bis Donnerstag, den 07.02.2013, in den dafür vorgesehenen gelben Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.