Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

18.01.2013

Algebra – Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $(K, |\cdot|_v)$ ein ultrametrisch bewerteter Körper und sei v die Exponentialbewertung zu $|\cdot|_v$. Zeigen Sie:

(a) $|\cdot|_v : K \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Abbildung.

(b) Sei $|\cdot|_{v'}$ eine weitere ultrametrische Bewertung auf K und v' die zugehörige Exponentialbewertung. Dann gilt: $|\cdot|_v \sim |\cdot|_{v'} \iff v \sim v'$, wobei $\sim$ die Bewertungsäquivalenz bezeichnet.

(c) Das Ideal $\mathcal{P}_v = \{x \in K \mid |x|_v < 1\}$ ist ein maximales Ideal im **Einheitskreis** $\mathcal{O}_v = \{x \in K \mid |x|_v \leq 1\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{Q}_p$ die Komplettierung von $\mathbb{Q}$ bzgl. der p-adischen Bewertung $|\cdot|_p$.

(a) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$ ist die Folge $\{a^{p^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}_p$ konvergent.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}_p$. Wir definieren die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

wie in der Analysis. Zeigen Sie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $(K, |\cdot|)$ ein diskret ultrametrisch bewerteter Körper mit dem Bewertungsring $\mathcal{O}$ und dem maximalen Ideal $\mathcal{P}$. Weiter bezeichne $(K', |\cdot|)$ eine Komplettierung von K mit dem Bewertungsring $\mathcal{O}'$ und dem maximalen Ideal $\mathcal{P}'$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $|K| = |K'|$ und in K' ist $\mathcal{O}'$ bzw. $\mathcal{P}'$ der Abschluss von $\mathcal{O}$ bzw. von $\mathcal{P}$.

(b) Die Inklusion $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ induziert einen kanonischen Isomorphismus $\mathcal{O}/\mathcal{P} \cong \mathcal{O}'/\mathcal{P}'$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 24.01.2013, in den dafür vorgesehenen gelben Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.