Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

25.01.2013

Algebra – Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei p eine ungerade Primzahl. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Q}_p$ keine primitiven p-ten Einheitswurzeln enthalten sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}(i)$. Dann ist $3\mathcal{O}_K =: \mathfrak{p}$ ein Primideal (dies brauchen Sie nicht zu zeigen). Sei $K_\mathfrak{p}$ die Komplettierung von K bzgl. des p-adischen Betrags $|\cdot|_\mathfrak{p}$. Mit $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ bezeichnen wir den Bewertungsring von $K_\mathfrak{p}$.
Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 = 2$ eine Lösung in $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ hat.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit dem henselschen Lemma, dass $\sqrt{-1}$ in $\mathbb{Z}_{13}$ existiert.

(b) Für welche Primzahlen p existiert $\sqrt{-1}$ in $\mathbb{Z}_p$?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei $a \in \mathbb{Z}_p$ mit $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau eine $(p-1)$-te Einheitswurzel in $\mathbb{Z}_p$, die kongruent a mod p ist.

(b) Es gibt eine Bijektion zwischen $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ und $\mu_{p-1} := \{\zeta \in \mathbb{Z}_p \mid \zeta^{p-1} = 1\}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 31.01.2013, in den dafür vorgesehenen gelben Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.