Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

02.11.2012

Algebra – Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind:

(a) $X^{p-1} + \ldots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ für eine beliebige Primzahl p,

(b) $X^3 - Y^2X^2 + YX + 4Y \in \mathbb{C}[X][Y]$,

(c) $Y^2 - X^3 \in \mathbb{C}[X][Y]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $D : K[X] \longrightarrow K[X], D(\sum_{i=0}^{d} c_i X^i) := \sum_{i=1}^{d} ic_i X^{i-1}$ die Ableitung. Zeigen Sie, dass für die Multiplikation die Leibnizregel $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Eine Körpererweiterung L/K ist genau dann algebraisch, wenn jeder Unterring R von L mit $K \subseteq R \subseteq L$ ein Körper ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei L/K eine Körpererweiterung und es seien $A, B \subseteq L$ beliebige Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $K(A \cup B) = (K(A))(B)$.

(b) Es gilt $K(A \cap B) \subseteq K(A) \cap K(B)$.

(c) Im Aufgabenteil (b) tritt Gleichheit nicht notwendigerweise auf. Bitte geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 08.11.2012, in den dafür vorgesehenen gelben Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.