Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

09.11.2012

Algebra – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $\hat{\mathbb{Q}} := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \text{ ist algebraisch über } \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie:

(a) $\hat{\mathbb{Q}}$ ist ein Körper.

(b) $[\hat{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}] = \infty$.

Zusatzfrage: Wie hängt $\hat{\mathbb{Q}}$ mit dem algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ zusammen?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $L = K(\alpha)$ eine algebraische Erweiterung eines Körpers K.

(a) Das Minimalpolynom von α sei $X^n - a \in K[X]$ und in $K^\times$ gebe es ein Element ζ der Ordnung n. Stellen Sie alle Nullstellen des Minimalpolynoms mit Hilfe von α und ζ dar und zeigen Sie dann, dass $\mathrm{Aut}(L/K) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt.

(b) Sei $p = \mathrm{char}(K)$ eine Primzahl und $m(X) := X^p - X + a$ das Minimalpolynom von α über K. Zeigen Sie, dass auch $\alpha + 1$ eine Nullstelle von m ist und dass $\mathrm{Aut}(L/K) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie den Zerfällungskörper K von $f(X) = X^4 - 3$ über $\mathbb{Q}$ und die Automorphismengruppe $G := \mathrm{Aut}(K/\mathbb{Q})$ der $\mathbb{Q}$-Automorphismen von K. Ist $K/\mathbb{Q}$ galoissch?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für das Polynom $p(X) := (X^3-2)(X^2-3) \in \mathbb{Q}[X]$ den Zerfällungskörper K und den Grad $[K : \mathbb{Q}]$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 15.11.2012, in den dafür vorgesehenen gelben Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.