Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao
16.11.2012

Algebra – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\zeta := \exp(\frac{2\pi i}{5}) \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass ζ eine Nullstelle des über $\mathbb{Q}$ irreduziblen Polynoms

$$\phi_5 = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1.$$

ist. Ist $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ galoissch?

(b) Zeigen Sie, dass $\xi := \cos(\frac{2\pi}{5}) \in \mathbb{Q}(\zeta)$ und bestimmen Sie das Minimalpolynom von ξ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $a \in \mathbb{C}$ Nullstelle des Polynoms $f = X^3 - 3X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie:

(a) $f(X)$ teilt $f(X^2 - 2)$.

(b) $\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q}$ ist galoissch. Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(a)/\mathbb{Q})$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

(a) Zeigen Sie, dass $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist und bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

(b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{\frac{1}{2}} + i$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Eine komplexe Zahl $z = x + yi$ nennen wir konstruierbar, wenn der Punkt (x, y) in der Ebene $\mathbb{R}^2$ aus (0,0) und (1,0) mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist. Zeigen Sie:

(a) Alle $x \in \mathbb{Q}$ sind konstruierbar.

(b) Alle $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{Q}$ sind konstruierbar.

(c) Die Nullstellen der quadratischen Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ sind konstruierbar.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 22.11.2012, in den dafür vorgesehenen gelben Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.