Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao
23.11.2012

Algebra – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ galoissch ist und berechnen Sie die Galoisgruppe.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass sich der Winkel 120° nicht mit Zirkel und Lineal in drei gleich große Teile zerlegen läßt.

(b) Zeigen Sie, dass die Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal nicht möglich ist.

(c) Ist das regelmäßige 11-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K der Zerfällungskörper des Polynoms $f(X) = (X^3 - 2)(X^2 + 3) \in \mathbb{Q}[X]$. Ist die Gleichung $f(X) = 0$ durch Radikale auflösbar?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $F = (F_0, F_1, \ldots)$ die Folge der *Fermat-Zahlen* mit $F_n = 2^{2^n} + 1$. Der französische Mathematiker Fermat (1601-1655) vermutete, dass alle Fermat-Zahlen Primzahlen sind. Wie man leicht nachprüft, gilt dies für F_0, F_1, F_2 und F_3. Auch die 4-te Fermat-Zahl $F_4 = 65537$ ist eine Primzahl. Die 5-te Fermat-Zahl hat den Wert $F_5 = 4294967297$ und Euler (1707-1783) zeigte, dass F_5 den Teiler 641 besitzt und somit keine Primzahl ist. Weitere Primzahlen in der Folge der Fermat-Zahlen sind bisher auch nicht gefunden worden. Im Jahre 1990 wurde eine Faktorzerlegung von F_9 gefunden; dabei wurden 700 vernetzte PC's und ein Supercomputer benutzt, wobei die Rechenzeit vier Monate betrug.

(a) Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $P_n := \prod_{k=0}^{n-1} F_k$ das Produkt der Fermat-Zahlen $F_0, F_1, \ldots, F_{n-1}$. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt: $P_n = F_n - 2$.

(b) Zeigen Sie, dass je zwei verschiedene Fermat-Zahlen relativ prim sind.

(c) Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 29.11.2012, in den dafür vorgesehenen gelben Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.