Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

30.11.2012

Algebra – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien p eine Primzahl und K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq p$ und $\mu_p \subset K$. Zeigen Sie:

(a) Jede Körpererweiterung $K(\sqrt[p]{a})/K$ mit $a \in K$ ist eine zyklische Galoiserweiterung.

(b) Sei L/K eine Galoiserweiterung und $[L : K] = p$. Dann gibt es ein $\alpha \in L$, sodass $\alpha^p \in K$ und $L = K(\alpha)$. Weiterhin gilt: $X^p - \alpha^p$ ist irreduzibel über K.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei R ein Ring. R heißt *artinsch*, wenn es für jede absteigende Kette $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ einen Index n gibt, so dass $I_m = I_n$ für alle $m \geq n$. Zeigen Sie:

(a) Ein artinscher Ring ist noethersch.

(b) Umgekehrt ist ein noetherscher Ring nicht unbedingt artinsch. Geben Sie ein Beispiel an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher Integritätsbereich und sei $x \in R$ weder 0 noch eine Einheit. Zeigen Sie:

(a) x hat einen irreduziblen Faktor.

(b) x hat eine Faktorisierung als endliches Produkt von irreduziblen Elementen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Ring $\{f \in \mathbb{Q}[X] \mid f(0) \in \mathbb{Z}\}$ nicht noethersch ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 06.12.2012, in den dafür vorgesehenen gelben Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.