

Algebra – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien R und S Ringe. Zeigen Sie:

- Das Produkt $R \times S$ ist genau dann noethersch, wenn R und S beide noethersch sind.
- Seien R und S noethersch und T ein Teilring von $R \times S$. T ist noethersch, wenn die Projektionen $T \rightarrow R$ und $T \rightarrow S$ surjektiv sind. Geben Sie ein Beispiel dafür, dass die umgekehrte Schlussfolgerung nicht gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien R ein kommutativer Ring und M ein R -Modul. Zu einem Untermodul U von M sei $\iota : U \rightarrow M$ die Einbettung. Zeigen Sie, dass dann für alle R -Moduln N gilt:

$$(M/U) \otimes N \cong (M \otimes N)/(\iota \otimes \text{id}_N)(U \otimes N).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung. Zu jedem $a \in L$ betrachten wir die K -lineare Abbildung $\phi_a : L \rightarrow L, x \mapsto ax$. Die *Spur* der Körpererweiterung L/K ist definiert als die Abbildung $\text{Sp}_{L/K} : L \rightarrow K$ mit $\text{Sp}_{L/K}(a) := \text{Spur}(\phi_a)$. Zeigen Sie:

- Die Spurabbildung $\text{Sp}_{L/K}$ lässt sich fortsetzen zu einer L -linearen Abbildung von $L \otimes_K L$ nach L .
Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $\Phi : L \otimes_K L \rightarrow L, l_1 \otimes l_2 \mapsto l_2 \cdot \text{Sp}_{L/K}(l_1)$.
- Es gibt eine endlichdimensionale L -Algebra A , sodass $L \otimes_K L$ isomorph zu $L \times A$ ist.
Hinweis: Schreiben Sie L als $K[X]/(f)$, wobei f das Minimalpolynom eines primitiven Elements von L/K ist.
- $\text{Sp}_{L/K}$ ist nicht die Nullabbildung.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring. Ist $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von R -Moduln, so ist für jeden R -Modul N die Sequenz

$$M' \otimes N \xrightarrow{f'} M \otimes N \xrightarrow{g'} M'' \otimes N \longrightarrow 0$$

mit $f' := f \otimes \text{id}_N$ und $g' := g \otimes \text{id}_N$ exakt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 13.12.2012, in den dafür vorgesehenen gelben Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.