Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao
14.12.2012

Algebra – Übungsblatt 9

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wir betrachten den Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ versehen mit der Normabbildung $N(a + b\sqrt{-5}) := a^2 + 5b^2$. Zeigen Sie:

(a) Die Elemente 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$ und $1 - \sqrt{-5}$ sind irreduzibel in R.

(b) R ist nicht faktoriell.

(c) Ist $0 \neq I \trianglelefteq R$, so hat der Quotientenring R/I nur endlich viele Elemente.

(d) R ist noethersch.

(e) R ist der Ganzheitsring von $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben seien ein Integritätsbereich R und eine kommutative R-Algebra S. Zeigen Sie:

(a) Der ganze Abschluss von R in S ist ganzabgeschlossen in S.

(b) Sei N eine Teilmenge von R, für die

$$1 \in N,\ 0 \notin N \quad \text{und} \quad mn \in N \text{ für alle } m, n \in N$$

gilt. Dann ist

$$N^{-1}R := \{\frac{r}{n} \mid r \in R, n \in N\}$$

ganzabgeschlossen, falls R selbst ganzabgeschlossen ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei A eine endlichdimensionale $\mathbb{Q}$-Algebra. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Zu jedem $a \in A \setminus \{0\}$ gibt es ein $b \in A$, sodass $\mathrm{Spur}_A(ab) \neq 0$.

(ii) Für alle $\mathbb{Q}$-Basen $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von A gilt $\det(\mathrm{Spur}_A(b_i b_j))_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$.

(iii) Es gibt eine $\mathbb{Q}$-Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von A mit $\det(\mathrm{Spur}_A(b_i b_j))_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 20.12.2012, in den dafür vorgesehenen gelben Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.