Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. C.-G. Schmidt
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

11.01.2013

Algebra – Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$.

(a) Ist $\alpha = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$ ganz über $\mathbb{Q}$?

(b) Ist der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}, \sqrt{7}]$ ganzabgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Sei d_K die Diskriminante von K. Zeigen Sie: $d_K \mid 2^8 3^2 7^2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Sei $(K, |\cdot|_v)$ ein nicht-archimedisch bewerteter Körper. Dann gilt:
$|x-y|_v \geq ||x|_v - |y|_v|$.

(b) Unter der gleichen Voraussetzung wie in (a) gilt: Ist $|x|_v \neq |y|_v$, so ist
$|x+y|_v = \max\{|x|_v, |y|_v\}$.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n = a_0 + a_1 p + \ldots + a_{r-1} p^{r-1}$, $0 \leq a_i < p$, seine p-adische Entwicklung. Weiter sei $s = a_0 + a_1 + \ldots + a_{r-1}$. Dann gilt: $v_p(n!) = \frac{n-s}{p-1}$, wobei v_p die p-adische Bewertung ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $1 \neq d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei und $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ der zugehörige quadratische Zahlkörper. Weiter sei $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$, falls $d \equiv 1 \bmod 4$ ist und $\omega = \sqrt{d}$ sonst. Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

(a) p ist genau dann träge in $F/\mathbb{Q}$, wenn das Minimalpolynom von ω keine Nullstelle in $\mathbb{F}_p$ hat.

(b) p ist genau dann voll zerlegt in $F/\mathbb{Q}$, wenn das Minimalpolynom von ω zwei einfache Nullstellen in $\mathbb{F}_p$ hat.

(c) p ist genau dann verzweigt in $F/\mathbb{Q}$, wenn es die Diskriminante von F teilt.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $(K, |\cdot|)$ ein nicht-archimedisch bewerteter Körper. Unter einer **ϵ-Umgebung des Punktes** a verstehen wir die Menge $U(a,\epsilon) := \{x \in K \mid |x-a| < \epsilon\}$. Eine Teilmenge $M \subset K$ heißt **Umgebung** von a, falls ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $U(a,\epsilon) \subset M$. M heißt **offen**, falls sie eine Umgebung aller $c \in M$ ist. M heißt **abgeschlossen**, falls das Komplement $K \setminus M$ offen ist. Zeigen Sie:

(a) $b \in U(a,\epsilon) \Longrightarrow U(a,\epsilon) = U(b,\epsilon)$.

(b) $U(a,\epsilon) \cap U(b,\epsilon) \neq \emptyset \Longrightarrow U(a,\epsilon) = U(b,\epsilon)$.

(c) $U(a,\epsilon)$ ist offen und abgeschlossen.

(d) $a \neq b \Longrightarrow \exists \delta > 0 : U(a,\delta) \cap U(b,\epsilon) = \emptyset$, d.h. K ist **hausdorffsch**.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 17.01.2013, in den dafür vorgesehenen gelben Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.