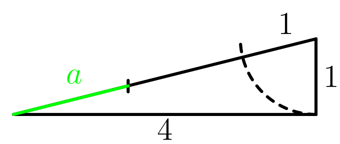
Eine Konstruktion des regelmäßigen 17-Ecks

Im Folgenden wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem sich das regelmäßige 17-Eck mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt. Wir brauchen dazu natürlich einige Sätze aus der Elementargeometrie, wie den Satz von Thales, den Höhensatz ($h^2 = pq$), und zentrische Streckung. Diese und auch die Bereitschaft, einige algebraische Relationen nachzurechnen oder zu glauben, setzen wir voraus. Es sei $z = \exp(2\pi \mathrm{i}/17)$. Das regelmäßige 17-Eck im Einheitskreis der komplexen Zahlenebene hat (bis auf Drehung um den Nullpunkt) die Eckpunkte $1, z, z^2, \ldots, z^{16}$. Wir müssen also z konstruieren. Der Körper $K := \mathbf{Q}(z)$ hat über $\mathbf{Q}$ den Grad 16, es gilt

$$0 = \frac{z^{17}-1}{z-1} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{16}.$$

Die Galoisgruppe ist zyklisch von Ordnung 16 und wird von $\sigma : z^m \mapsto z^{6m}$ (für $0 \leq m \leq 16$) erzeugt. Nun wollen wir Schritt für Schritt die Zwischenkörper zwischen $\mathbf{Q}$ und K konstruieren. Es gibt jeweils einen Zwischenkörper vom Grad 2,4, und 8 über $\mathbf{Q}$. Diese werden erzeugt (benutze Galoistheorie!) von $a := z + z^2 + z^4 + z^8 + z^9 + z^{13} + z^{15} + z^{16}$ (invariant unter σ^2), $b := z + z^4 + z^{13} + z^{16}$ (invariant unter σ^4), und $c := z + z^{16}$. Es ist $c = 2\cos(2\pi/17)$.
Nun kommen die geometrischen Konstruktionen der Zahlen a, b, und c. Die jeweils neu konstruierte Größe wird in jeder Zeichnung grün hervorgehoben. Das Fällen von Loten oder Halbieren von Strecken lassen wir als Selbstverständlichkeit aus den Zeichnungen fort.

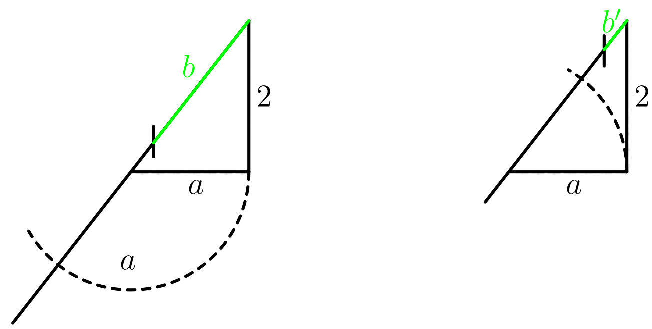
Erster Schritt: Konstruktion von a: $a = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$.
Zum Glück ist $17 = 4^2 + 1^2$. Da hilft uns Pythagoras:



Zweiter Schritt: Konstruktion von b.
Die zweite Nullstelle des Minimalpolynoms von b über $\mathbf{Q}(a)$ ist $\sigma^2(b) = z^2 + z^8 + z^9 + z^{15}$. Es ist

$$(X - b)(X - \sigma^2(b)) = X^2 - aX - 1,$$

also $b = \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$ ("+"wegen Vorzeichen). Wir brauchen auch gleich noch $b' := -\sigma^2(b) = \frac{\sqrt{a^2+4}-a}{2}$. Die Zahlen b und b' lassen sich so konstruieren:



Dritter Schritt: Konstruktion von $c = z + z^{-1}$.

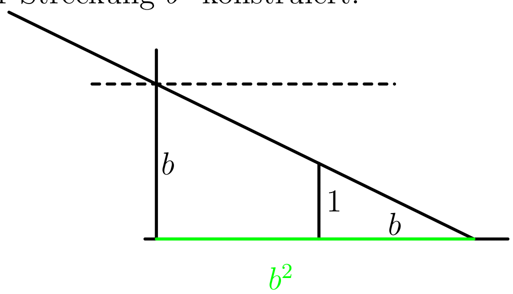
Die zweite Nullstelle des Minimalpolynoms von c über $\mathbf{Q}(b)$ ist $\sigma^4(c) = z^4 + z^{-4}$. Es gilt

$$(X - c)(X - \sigma^4(c)) = X^2 - bX + (z^3 + z^5 + z^{12} + z^{14}) = X^2 - bX + (b^2 - \sigma^2(b) - 4)/2.$$

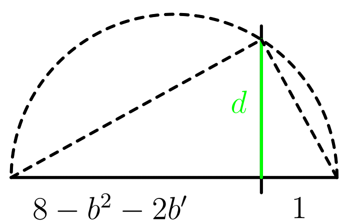
Es ist also

$$c = \frac{b + \sqrt{-b^2 - 2b' + 8}}{2}.$$

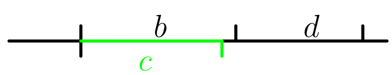
Zunächst wird mit zentrischer Streckung b^2 konstruiert:



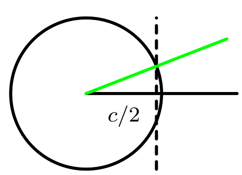
Dann geben uns der Höhensatz und der Satz von Thales die Zahl $d := \sqrt{8 - b^2 - 2b'}$:



Am Ende ist $c = (b + d)/2$:



Damit schneiden wir wegen $c/2 = \cos\frac{2\pi}{17}$ das erste Kuchenstück des regulären 17-Ecks so aus:



Ein bisschen größer gemacht und vervollständigt, erhalten wir