Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

24.10.2013

Algebra – Übungsblatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Es seien $(H, *)$, $(N, \cdot)$ zwei Gruppen und $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphismus. Auf dem cartesischen Produkt $G := N \times H$ sei eine Verknüpfung $\star$ definiert durch

$$(n_1, h_1) \star (n_2, h_2) \mapsto (n_1 \cdot \varphi(h_1)(n_2), h_1 * h_2) \text{ für } n_1, n_2 \in N, h_1, h_2 \in H.$$

Zeigen Sie, dass $(G, \star)$ eine Gruppe ist, die $N \times \{1_H\}$ als Normalteiler und $\{1_N\} \times H$ als Untergruppe enthält.
Bemerkung: G wird mit $N \rtimes_\varphi H$ bezeichnet und heißt das *äußere semidirekte Produkt* von N und H bezüglich φ.

(b) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. N, H seien Untergruppen von G mit den Eigenschaften

- $G = N \cdot H$,
- $H \cap N = \{1_G\}$,
- N ist Normalteiler in G.

Zeigen Sie, dass $\Phi : N \rtimes_\varphi H \to G, (n, h) \mapsto n \cdot h$ mit $\varphi(h)(n) = h \cdot n \cdot h^{-1}$ ein Isomorphismus von Gruppen ist.
Bemerkung: G heißt das *innere semidirekte Produkt* von N und H.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Ist $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler vom Index r in G, so gilt $g^r \in N$ für alle $g \in G$.

(b) Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in G$ $(m \in \mathbb{N})$ Elemente ungerader Ordnung. Sei $H \leq G$ die von $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ erzeugte Untergruppe in G. Dann enthält H keine Untergruppe vom Index 2.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt keine einfache Gruppe der Ordnung

(a) 24,

(b) 40,

(c) 56.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei G eine einfache Gruppe der Ordnung 60. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) In G gibt es genau zehn 3-Sylowgruppen.

(b) In G gibt es genau sechs 5-Sylowgruppen.

(c) Es gibt einen Homomorphismus $G \to S_5$, dieser induziert einen Isomorphismus $G \xrightarrow{\sim} A_5$.

Abgabe: Bis Montag, den 04.11.2013, in den dafür vorgesehenen blauen Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn des Tutoriums an den Tutor.