

Algebra – Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass alle Hauptidealringe ganzabgeschlossen sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien ω eine komplexe Nullstelle von $\Phi_8 = X^4 + 1$, $K = \mathbb{Q}(\omega)$ und $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\omega]$. \mathcal{O} ist eine Ordnung in K .

- (a) Berechnen Sie die Diskriminante von \mathcal{O} und folgern Sie, dass \mathcal{O} genau dann nicht der ganze Abschluss von \mathbb{Z} in K ist, wenn es ein über \mathbb{Z} ganzes Element z gibt, das in $\frac{1}{2}\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}$ liegt.
- (b) Zeigen Sie, dass es ein Element z mit den in (a) genannten Eigenschaften nicht geben kann.

Hinweis: Bestimmen Sie anderenfalls das Minimalpolynom von z über $\mathbb{Q}(i) \subset K$. Wieso müsste dies in $\mathbb{Z}[i]$ liegen? Welchen Widerspruch erzeugte dies?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$.

- (a) Ist $\alpha = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$ ganz über \mathbb{Q} ?
- (b) Ist der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{3}, \sqrt{7}]$ ganzabgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (c) Sei d_K die Diskriminante von K . Zeigen Sie: $d_K \mid 2^8 3^2 7^2$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei A eine endlichdimensionale kommutative \mathbb{Q} -Algebra. Die Multiplikation mit $x \in A$ auf A bezeichnen wir mit μ_x . Dann ist die Spurpaarung tr auf A definiert durch

$$\forall x, y \in A : \text{tr}(x, y) = \text{Spur}(\mu_{xy}).$$

Für eine Teilmenge $U \subseteq A$ setzen wir

$$U^\perp := \{x \in A \mid \forall u \in U : \text{tr}(x, u) = 0\}.$$

Dies ist ein Untervektorraum von A . Sei nun die Spurpaarung nicht ausgeartet. Zeigen Sie:

- (a) In A gibt es kein nilpotentes Element außer 0.
- (b) Für ein Ideal I in A ist I^\perp ebenfalls ein Ideal und es gilt $I \cap I^\perp = \{0\}$.
- (c) Jedes minimale Ideal in A ist ein Restklassenkörper von A .
- (d) A ist eine endliche direkte Summe von Körpern.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 16.01.2014, in den dafür vorgesehenen blauen Einwurfskasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.