Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

24.01.2014

Algebra – Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie: Jedes gebrochene Ideal M eines Dedekindrings $\mathcal{O}$ ist ein *projektiver* $\mathcal{O}$-Modul, d.h. es gibt einen $\mathcal{O}$-Modul N, sodass $M \oplus N$ ein freier $\mathcal{O}$-Modul ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Gegeben sei der Ring $R = \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3 + 1)$ mit Quotientenkörper K. Zeigen Sie:

(a) R ist der ganze Abschluss von $\mathbb{C}[X]$ in K.

(b) R ist ein Dedekindring.

Welche maximalen Ideale gibt es in R?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Ganzheitsringe der quadratischen Zahlkörper mit Diskriminante d_K gleich 5 oder -7 triviale Klassengruppe haben.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass es in jeder Idealklasse eines quadratischen Zahlkörpers K ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ gibt mit

$$N(\mathfrak{a}) \leq \frac{1}{2}(\frac{4}{\pi})^s \sqrt{|d_K|},$$

wobei $2s$ die Anzahl der komplexen Einbettungen von K in $\mathbb{C}$ ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 30.01.2014, in den dafür vorgesehenen blauen Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.