Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

31.01.2014

Algebra – Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei A ein lokaler Ring, d. h. A hat genau ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Weiter seien M ein A-Modul und $N \subset M$ ein Untermodul, sodass M/N endlich erzeugt ist. Zeigen Sie:

$$M = N + \mathfrak{m}M \Longrightarrow M = N.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei der Ring $R = \mathbb{C}[X,Y]/(Y^2 - X^3 + 1)$ mit Quotientenkörper K.

(a) Geben Sie die Äquivalenzklassen der diskreten Bewertungen auf K an.

(b) Sei V die Menge aller diskreten Bewertungen auf K mit Werten in $\mathbb{Z}$ und seien v_0, v_1 zwei verschiedene Bewertungen in V. Wir definieren eine Funktion $D : V \to \mathbb{Z}$ durch die Vorschrift

$$D(v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } v = v_0, \\ -1, & \text{falls } v = v_1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gibt es eine rationale Funktion $f \in K$ mit $v(f) = D(v)$ für alle $v \in V$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $|\cdot|_p$ die p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$ ist die Folge $(a^{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$. Wir definieren die Folge

$$A_N := \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Zeigen Sie: (A_N) ist eine Cauchy-Folge $\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $p \neq 2, 5$ eine Primzahl mit $(\frac{p}{5}) = 1$. Zeigen Sie, dass es zwei Fortsetzungen der p-adischen Bewertungen auf $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ gibt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 06.02.2014, in den dafür vorgesehenen blauen Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.