Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

07.02.2014

Algebra – Übungsblatt 14

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei K ein Körper und R der Ring der K-wertigen Folgen. Für eine Folge $f \in R$ sei $N(f) := \{n \in \mathbb{N} \mid f_n = 0\}$ die Menge der Nullstellen von f. Für ein Ideal $I \subset R$ sei $\mathcal{F} := \{N(f) \mid f \in I\}$.
Zeigen Sie:

(a) Die Einheiten in R sind genau die Folgen mit $N(f) = \emptyset$.

(b) Für $f \in R$ gilt $f \in I \Leftrightarrow N(f) \in \mathcal{F}$.

(c) Für eine Funktion $\Phi : K \to K$ ist durch

$$^*\Phi : R/I \to R/I, \ ^*\Phi(f + I) := (\Phi(f_n))_{n\in\mathbb{N}} + I$$

eine Abbildung definiert.

(d) $\mathcal{F}$ hat folgende Eigenschaften:
- * $\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ und $\emptyset \in \mathcal{F} \iff I = R$.
- * $S \in \mathcal{F}$ und $T \subseteq \mathbb{N}, S \subseteq T \Rightarrow T \in \mathcal{F}$.
- * $S, T \in \mathcal{F} \Rightarrow S \cap T \in \mathcal{F}$.

(e) Wenn K endlich und I ein maximales Ideal ist, dann ist R/I zu K isomorph.

(f) Wenn K unendlich ist und $\mathcal{F}$ das Komplement jeder endlichen Teilmenge von $\mathbb{N}$ enthält, dann liegt in R/I ein über K transzendentes Element.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Q}(i)$. Dann ist $3\mathcal{O}_K =: \mathfrak{p}$ ein Primideal (dies brauchen Sie nicht zu zeigen). Sei $K_\mathfrak{p}$ die Komplettierung von K bzgl. des p-adischen Betrags $|\cdot|_\mathfrak{p}$. Mit $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ bezeichnen wir den Bewertungsring von $K_\mathfrak{p}$.
Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 = 2$ eine Lösung in $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ hat.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl und sei $a \in \mathbb{Z}_p$ mit $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Z}_p$ enhält genau die $(p-1)$-ten Einheitswurzeln für $p \neq 2$.

(b) Es gibt genau eine $(p-1)$-te Einheitswurzel in $\mathbb{Z}_p$, die kongruent $a \bmod p$ ist.

(c) Es gibt eine Bijektion zwischen $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ und $\mu_{p-1} := \{\zeta \in \mathbb{Z}_p \mid \zeta^{p-1} = 1\}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die 5-adischen Entwicklungen von $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{2}$ in $\mathbb{Q}_5$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 13.02.2014, in den dafür vorgesehenen blauen Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.