Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

31.10.2013

Algebra – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien p, q Primzahlen. Zeigen Sie:

(a) Jede Gruppe der Ordnung p^2q ist auflösbar.

(b) Jede Gruppe der Ordnung 700 ist auflösbar.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien R, S kommutative Ringe mit Eins und sei $\phi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

(a) Urbilder von Primidealen unter ϕ sind wieder Primideale.

(b) Bilder von Primidealen unter ϕ sind nicht unbedingt wieder Primideale.

Was passiert dann, wenn wir in (a) und (b) maximale Ideale statt Primideale betrachten?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien K ein Körper, $R = K^{2\times 2}$ und $M = K^2$ ein R-Modul via der Vorschrift $R \times M \to M, (A, v) \mapsto Av$. Zeigen Sie: M ist einfach und jeder einfache R-Modul ist isomorph zu M.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien R ein Ring und M ein R-Modul, der sich als direkte Summe endlich vieler einfacher Moduln darstellen lässt. Zeigen Sie, dass die Summanden einer Zerlegung $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ in einfache Moduln bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 07.11.2013, in den dafür vorgesehenen blauen Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.