Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dipl.-Math. Jingwei Zhao

08.10.2013

Algebra – Übungsblatt 3

Aufgabe 1   (4 Punkte)

Zeigen Sie: Eine Körpererweiterung $K \subseteq L$ ist genau dann algebraisch, wenn jeder Unterring R von L mit $K \subseteq R \subseteq L$ ein Körper ist.

Aufgabe 2   (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und f, g seien zwei Polynome aus $K[T]$ mit $\mathrm{ggT}(f,g) = 1$ und $\frac{f}{g}$ nichtkonstant. Wir setzen $L = K(T)$ und $F = K(\frac{f}{g})$. Zeigen Sie: $F \subseteq L$ ist algebraisch und der Körpergrad $[L : F] = \max\{\mathrm{Grad}\, f, \mathrm{Grad}\, g\}$.

Aufgabe 3   (4 Punkte)

Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und es seien $A, B \subseteq L$ beliebige Teilmengen. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $K(A \cup B) = (K(A))(B)$.

(b) Es gilt $K(A \cap B) \subseteq K(A) \cap K(B)$.

(c) Im Aufgabenteil (b) tritt Gleichheit nicht notwendigerweise auf. Bitte geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4   (4 Punkte)

Das n-te *Kreisteilungspolynom* $\Phi_n \in \mathbb{C}[X]$ ist definiert als Produkt aller Polynome $X - \zeta$ über die primitiven n-ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$:

$$\Phi_n := \prod_{\zeta}^{*} (X - \zeta).$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Eisensteinkriteriums, dass für eine beliebige Primzahl p das Kreisteilungspolynom Φ_{p^n} irreduzibel über $\mathbb{Z}$ ist .

Abgabe: Bis Donnerstag, den 14.11.2013, in den dafür vorgesehenen blauen Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.