Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dipl.-Math. Jingwei Zhao
15.10.2013

Algebra – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein faktorieller Ring ist ein Integritätsbereich, in dem sich jede von Null verschiedene Nichteinheit eindeutig (bis auf Assoziiertheit und Reihenfolge) als Produkt von irreduziblen Elementen schreiben lässt. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[X]$ faktoriell ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien K ein perfekter Körper, $K \subset L$ eine algebraische Körpererweiterung und $D : L \to L$ eine K-Derivation, d.h. eine K-lineare Abbildung $L \to L$ mit $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ für alle $a, b \in L$. Des Weiteren sei α ein beliebiges Element in L. Zeigen Sie:

(i) Es gilt: $D(\alpha^n) = n\alpha^{n-1}D(\alpha)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Es gilt: $D(f(\alpha)) = f'(\alpha)D(\alpha)$ für alle $f \in K[X]$.

(iii) Die Derivation D ist konstant 0 auf L.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien K ein Körper und r eine nichtkonstante rationale Funktion in $K(X)$. Zeigen Sie:

(i) $\phi : K(X) \to K(X), f \mapsto f(r)$ ist ein Endomorphismus.

(ii) ϕ ist genau dann ein Automorphismus, wenn r von der Form $\frac{ax+b}{cx+d}$ mit $a, b, c, d \in K$ und $ad - bc \neq 0$ ist.

(iii) $\mathrm{Aut}(K(X) \mid K) \cong \mathrm{PGL}_2(K)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für das Polynom $p(X) = (X^3 - 2)(X^2 - 3) \in \mathbb{Q}[X]$ den Zerfällungskörper K und den Grad $[K : \mathbb{Q}]$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 21.11.2013, in den dafür vorgesehenen blauen Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.