Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dipl.-Math. Jingwei Zhao
06.10.2013

Algebra – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Seien p eine Primzahl und $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ ein Automorphismus von Ordnung p. Ferner sei $K = \mathbb{C}^{\langle\sigma\rangle}$ der Fixkörper von σ. Zeigen Sie:

(a) Die irreduziblen Polynome in $K[X]$ haben Grad 1 oder p.

(b) In K liegt eine primitive p-te Einheitswurzel.

(c) Es gilt $\mathbb{C} = K(\xi)$ für eine primitive p^2-te Einheitswurzel.

Sei nun $\zeta \in \mathbb{C}$ eine p-te Wurzel von ξ und p ungerade, $L = \mathbb{Q}(\zeta)$. Zeigen Sie:

(d) In $\mathbb{Q}(\zeta)$ ist $\mathbb{Q}(\xi)$ der einzige Teilkörper, über dem $\mathbb{Q}(\zeta)$ Grad p hat. Das Minimalpolynom von ζ ist $X^p - \xi$.

(e) Das Minimalpolynom von ζ über K hat Grad p und Koeffizienten in $\mathbb{Q}(\zeta)$.

(f) ξ liegt in K.

(g) $p = 2$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ in einem Kreisteilungskörper enthalten ist.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\left(\sum_{i=1}^{p-1} (\frac{i}{p})\zeta^i\right)^2 = \pm p$ für eine beliebige ungerade Primzahl p gilt, wobei $(\frac{i}{p})$ das Legendre-Symbol und ζ eine primitive p-te Einheitswurzel ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher Integritätsbereich und sei $x \in R$ weder 0 noch eine Einheit. Zeigen Sie:

(a) x hat einen irreduziblen Faktor.

(b) x hat eine Faktorisierung als endliches Produkt von irreduziblen Elementen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 12.12.2013, in den dafür vorgesehenen blauen Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.