

## Algebra – Übungsblatt 8

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei  $R$  ein kommutativer Ring. Ist  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$  eine exakte Sequenz von  $R$ -Moduln. Zeigen Sie: Für jeden  $R$ -Modul  $N$  ist die Sequenz

$$M' \otimes N \xrightarrow{f'} M \otimes N \xrightarrow{g'} M'' \otimes N \rightarrow 0$$

mit  $f' := f \otimes \text{id}_N$  und  $g' := g \otimes \text{id}_N$  exakt.

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei  $K \subset L$  eine endliche separable Körpererweiterung. Zu jedem  $a \in L$  betrachten wir die  $K$ -lineare Abbildung  $\phi_a : L \rightarrow L, x \mapsto ax$ . Die *Spur* der Körpererweiterung  $L/K$  ist definiert als die Abbildung  $\text{Sp}_{L/K} : L \rightarrow K$  mit  $\text{Sp}_{L/K}(a) := \text{Spur}(\phi_a)$ . Zeigen Sie:

- $\text{Sp}_{L/K}$  lässt sich fortsetzen zu einer  $L$ -linearen Abbildung von  $L \otimes_K L$  nach  $L$ .  
*Hinweis:* Betrachten Sie die Abbildung  $\Phi : L \otimes_K L \rightarrow L, l_1 \otimes l_2 \mapsto l_2 \cdot \text{Sp}_{L/K}(l_1)$ .
- Es gibt eine endlichdimensionale  $L$ -Algebra  $A$ , sodass  $L \otimes_K L$  isomorph zu  $L \times A$  ist.  
*Hinweis:* Schreiben Sie  $L$  als  $K[X]/(f)$ , wobei  $f$  das Minimalpolynom eines primitiven Elements von  $L/K$  ist.
- $\text{Sp}_{L/K}$  ist nicht die Nullabbildung.
- Die  $n$  verschiedenen  $K$ -Morphismen  $L \rightarrow \overline{K}$  seien mit  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  bezeichnet. Dann gilt:

$$\text{Sp}_{L/K}(a) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(a) \quad \text{für alle } a \in L.$$

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Tensorprodukt  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  mit  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

Bitte wenden!

#### **Aufgabe 4 (4 Punkte)**

Seien  $M, N$  Moduln über einem Ring  $R$ , und gelte  $M \cong M \oplus N, N \neq 0$ . Zeigen Sie, dass  $M$  nicht noethersch ist, und finden Sie ein konkretes Beispiel dafür, dass die Voraussetzung erfüllt sein kann.

**Abgabe:** Bis Donnerstag, den 19.12.2013, in den dafür vorgesehenen blauen Einwurfkasten im Allianzgebäude vor Raum 1C-04 oder vor Beginn der Übung an die Übungsleiterin.