Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Florian Nisbach

20. 4. 2010

Algebra II – Übungsblatt 1

Alle Ringe auf diesem Blatt seien kommutativ und mit Eins.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei R ein nullteilerfreier Ring, $Q := \mathrm{Quot}(R)$ sein Quotientenkörper mit kanonischer R-Modulstruktur. Zeige, dass dann äquivalent sind:

i) Q ist freier R-Modul.

ii) Q ist endlich erzeugter R-Modul.

iii) R ist ein Körper.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei R nullteilerfrei, M ein R-Modul. Dann ist die Menge der Torsionselemente vom M durch

$$T(M) := \{x \in M \mid \exists r \in R \setminus \{0\} : rx = 0\}$$

gegeben. M heißt *torsionsfrei*, wenn $T(M) = \{0\}$. Zeige:

a) $T(M) \subset M$ ist ein Untermodul.

b) Ist M frei, dann ist M auch torsionsfrei.

c) Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Im Ring $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist $I := \langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle$ kein Hauptideal[1].

a) Sei $A := \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1+\sqrt{-5} \\ -1+\sqrt{-5} & -2 \end{smallmatrix}\right)$, $\Phi : R^2 \to R^2$, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto A \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, $M := \mathrm{Bild}\,\Phi$. Zeige: M ist kein freier R-Modul.

b) Zeige, dass $\Phi^2 = \Phi$ gilt und folgere daraus, dass M projektiv ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei M ein R-Modul. M heißt *divisibel*, wenn gilt:

$$\forall m \in M,\ r \in R \setminus \{0\}\ \exists m' \in M :\ rm' = m$$

a) Zeige: M ist genau dann injektiv, wenn für alle Ideale $I \trianglelefteq R$ die Einschränkung $\mathrm{Hom}_R(R,M) \to \mathrm{Hom}_R(I,M)$, $f \mapsto f_{|I}$ surjektiv ist. (*Hinweis:* Benutze Zorns Lemma!)

b) Sei R ein nullteilerfreier Hauptidealring. Zeige, dass der Modul M genau dann injektiv ist, wenn er divisibel ist.

Abgabe bis spätestens Dienstag, 27. 4. 2010, um 15:30 Uhr in den dafür vorgesehenen blauen Kasten im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt dort.

[1] siehe zum Beispiel das aktuelle LA-Übungsblatt...