KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
PROF. DR. F. HERRLICH
FLORIAN NISBACH

27. 4. 2010

Algebra II – Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei R ein Ring, M ein R-Modul und S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, die die 1 enthält. Dann ist die *Lokalisierung* von M nach S definiert als die Menge der Äquivalenzklassen von Paaren $(m,s) \in M \times S$, wobei zwei Paare (m,s) und (m',s') äquivalent heißen, falls es ein $t \in S$ gibt mit $t(s'm - sm') = 0$ in M. Die Äquivalenzklasse von (m,s) schreiben wir als $\frac{m}{s}$. M_S ist ein R-Modul vermöge

$$\forall m, m' \in M,\ s, s' \in S,\ r \in R: \frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{ms' + sm'}{ss'} \text{ und } r \cdot \frac{m}{s} = \frac{rm}{s}.$$

Zeige, dass gilt:

$$M_S \cong M \otimes_R R_S.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei R ein Ring und M, N und P drei R-Moduln. Zeige: Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \to \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N, P)).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Erinnere dich an Proposition 2.4 und folgere sie aus der Rechtsexaktheit des Tensorierens.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein R-Modul N heißt treuflach, wenn für jeden R-Modulhomomorphismus $f: M' \to M$ gilt:

$$f: M' \to M \text{ injektiv} \Leftrightarrow f_N: M' \otimes N \to M \otimes N \text{ injektiv.}$$

Sei nun N ein flacher R-Modul. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

i) N ist treuflach.

ii) Für jeden R-Modul $M \neq 0$ gilt $M \otimes N \neq 0$.

iii) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$ gilt $\mathfrak{m} \cdot N \subsetneq N$.

Abgabe bis spätestens Dienstag, 4. 5. 2010, um 15:30 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt dort.