KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE 4. 5. 2010
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
PROF. DR. F. HERRLICH
FLORIAN NISBACH

Algebra II – Übungsblatt 3

Auf diesem Blatt sei R wieder mal ein kommutativer Ring mit Eins und M ein R-Modul.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

TM sei die Tensoralgebra über M, deren Multiplikation einfach $ab := a \otimes b$ geschrieben wird, um Verwirrung aus dem Weg zu gehen. Wie in der Vorlesung wird $TM \otimes TM$ zur R-Algebra durch $(a \otimes b)(c \otimes d) := (ac) \otimes (bd)$.

a) Zeige, dass es eindeutig bestimmte R-Algebrenhomomorphismen $\varepsilon : TM \to R$ und $\Delta : TM \to TM \otimes TM$ gibt, sodass für jedes $v \in M$ gilt:

$$\varepsilon(v) = 0 \quad \text{sowie} \quad \Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1.$$

Seien $v_1, \ldots, v_n \in M$. Was ist $\Delta(v_1 \cdot \ldots \cdot v_n)$?

b) Sei $i : TM \otimes TM \to TM \otimes TM$, $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ die kanonische Involution auf $TM \otimes TM$. Zeige die folgenden Identitäten von R-Algebrenhomomorphismen:

i) $(id_{TM} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes id_{TM}) \circ \Delta = id_{TM} : TM \to TM$

ii) $(id_{TM} \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id_{TM}) \circ \Delta : TM \to TM \otimes TM \otimes TM$

iii) $i \circ \Delta = \Delta : TM \to TM \otimes TM$

Mache dabei ausgiebig Gebrauch von kanonischen Isomorphismen von Tensorprodukten.

Damit haben wir auf TM eine Struktur als *kokommutativer R-Koalgebra* definiert, und, da wir schon eine R-Algebrenstruktur hatten, sogar eine Struktur als *R-Bialgebra*.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei $d \in \mathbb{N}$. Mache die Zuordnung $M \mapsto \wedge^d M$ zu einem kovarianten Funktor $\underline{R\text{-Mod}} \to \underline{R\text{-Mod}}$.

b) Sei nun M freier R-Modul vom Rang $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$. Beschreibe den davon induzierten Endomorphismus $\wedge^n \varphi \in \mathrm{End}_R(\wedge^n M)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $2 \in R^\times$, und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. Zeige für $d > 1$ die folgenden Aussagen:

a) $I \cdot \wedge^d(I) = 0$

b) $\bigwedge^d(I) = \wedge^d(I/I^2)$

Abgabe bis spätestens Dienstag, 11. 5. 2010, um 15:30 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt dort.