KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
PROF. DR. F. HERRLICH
FLORIAN NISBACH

11. 5. 2010

Algebra II – Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Seien M ein R-Modul, A eine kommutative R-Algebra, $\varphi : M \to A$ ein R-Modulhomomorphismus. Zeige: Dann gibt es genau einen Homomorphismus von R-Algebren $\Phi : S(M) \to A$ mit $\Phi_{|M} = \varphi$.

b) Sei M nun ein freier R-Modul vom Rang $n \in \mathbb{N}$. Zeige:

$$S(M) \cong R[X_1, \ldots, X_n]$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung. Zeige, dass $\Omega_{L/K} = 0$.

b) Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$ und $c \in K$ keine p-Potenz. Sei weiter L der Zerfällungskörper des Polynoms $X^p - c \in K[X]$. Zeige, dass $\Omega_{L/K} \cong L$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Wir betrachten das Polynom $f := X^3 - X - Y^2$ im Polynomring $\mathbb{C}[X,Y]$ und die Faktoralgebra $A := \mathbb{C}[X,Y]/(f)$.

a) Zeige, dass für Ringe R, S mit einem surjektiven Homomorphismus $R \to S$ gilt: $\Omega_{S/R} = 0$.

b) Bestimme den Differentialmodul $\Omega_{A/\mathbb{C}}$.

c) Sei nun weiter $\mathfrak{M} = (X - x_0, Y - y_0)$ mit $x_0, y_0 \in \mathbb{C}$ ein maximales Ideal von $\mathbb{C}[X,Y]$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

   i) Das Bild $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{M}$ in A ist ein maximales Ideal.

   ii) Das Polynom f liegt in $\mathfrak{M}$.

   iii) (x_0, y_0) ist eine Nullstelle von f.

   Bemerkung: Es haben übrigens alle maximalen Ideale von $\mathbb{C}[X,Y]$ bzw. A die beschriebene Gestalt.

d) Sei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von A wie in c). Zeige, dass der Differentialmodul $\Omega_{A_\mathfrak{m}/\mathbb{C}}$ der Lokalisierung von A nach $\mathfrak{m}$ als $A_\mathfrak{m}$-Modul frei ist.

Abgabe bis spätestens Dienstag, 18. 5. 2010, um 15:30 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt dort.