KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
PROF. DR. F. HERRLICH
FLORIAN NISBACH

18. 5. 2010

Algebra II – Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4+2 Punkte)

a) Sei $0 \to P \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\phi} N \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Zeige: Dann ist $\phi \otimes \phi : M \otimes M \to N \otimes N$ surjektiv und es gilt:

$$\mathrm{Kern}(\phi \otimes \phi) = \mathrm{Bild}(i \otimes \mathrm{id}_M) + \mathrm{Bild}(\mathrm{id}_M \otimes i)$$

b) Sei $\pi_M : M \otimes M \to M \wedge M$ die kanonische Projektion. Zeige: Dann ist die Abbildung $\phi \wedge \phi : M \wedge M \to N \wedge N$ surjektiv und es gilt:

$$\mathrm{Kern}(\phi \wedge \phi) = \pi_M(\mathrm{Kern}(\phi \otimes \phi))$$

c) Neuer Versuch: Sei $2 \in R^\times$, und $I \trianglelefteq R$ ein Ideal. Zeige[1]:

$$I \wedge I \cong (I/I^2) \wedge (I/I^2)$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und A eine K-Algebra, die von $n > 0$ Elementen erzeugt wird. Zeige, dass $H^n_{dR}(A) = 0$.

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $\pi : A \to B$ ein surjektiver Homomorphismus von R-Algebren und I der Kern von π. Dann gibt es eine exakte Sequenz von B-Moduln

$$I/I^2 \xrightarrow{d} B \otimes_A \Omega_{A/R} \xrightarrow{D_\pi} \Omega_{B/R} \to 0,$$

wobei die Abbildungen gegeben sind durch $D_\pi : b \otimes da \mapsto b\,d\pi(a)$ und $d(f + I^2) = 1 \otimes df$.

Aufgabe 5 (4 Punkte) Sei R ein Ring und M ein R-Modul. M heißt *artinsch*, falls M die absteigende Kettenbedingung erfüllt, das heißt, wenn jede absteigende Kette von Untermoduln stationär wird. Der Ring R heißt *artinsch*, wenn er als Modul über sich selbst artinsch ist.

a) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ der Ring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ artinsch ist.

b) Gib ein Beispiel für einen Ring an, der noethersch aber nicht artinsch ist.

c) Zeige, dass jeder nullteilerfreie artinsche Ring ein Körper ist.

Abgabe bis spätestens Dienstag, 25. 5. 2010, um 15:30 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt dort.

[1] Die Aussage von Blatt 3, Aufgabe 3 b) stimmt natürlich immer noch auch für $d > 2$. Das würde aber mehr Fleißarbeit in Aufgabenteil a) erfordern