Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. F. Herrlich
Florian Nisbach

25. 5. 2010

Algebra II – Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei R ein Ring, sodass für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \trianglelefteq R$ die Lokalisierung $R_\mathfrak{m}$ noethersch ist und außerdem jedes $r \in R \setminus \{0\}$ nur in endlich vielen maximalen Idealen enthalten ist. Zeige: R ist noethersch.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei R ein noetherscher Ring. Zeige, dass dann auch der Ring der formalen Potenzreihen $R[\![X]\!]$ noethersch ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, A eine graduierte K-Algebra, die von endlich vielen homogenen Elementen von positivem Grad erzeugt werden kann, und M ein endlich erzeugter graduierter A-Modul. Zeige, dass dann die homogenen Komponenten von M endlichdimensionale K-Vektorräume sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei R ein graduierter Ring. Zeige folgende Aussagen:

a) Ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so ist das von den homogenen Elementen in $\mathfrak{p}$ erzeugte Ideal $\tilde{\mathfrak{p}} \subset R$ auch prim.

b) Ist $I \subset R$ ein echtes homogenes Ideal, so ist jedes minimale Element der Menge der Primideale, die I enthalten, ein homogenes Primideal.

Abgabe bis spätestens Dienstag, 1. 6. 2010, um 15:30 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt dort.