KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
PROF. DR. F. HERRLICH
FLORIAN NISBACH

1. 6. 2010

Algebra II – Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{Z}$ eine quadratfreie ganze Zahl $\neq 0,1$ und $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ der zugehörige quadratische Zahlkörper. Zeige, dass der ganze Abschluss $\mathcal{O}_K$ von $\mathbb{Z}$ in K gegeben ist durch

$$\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & \text{für } d \equiv 2,3 \bmod (4), \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}] & \text{für } d \equiv 1 \bmod (4). \end{cases}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Bestimme

a) alle maximalen Ideale von $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$,

b) alle maximalen Ideale von $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$,

c) für jedes maximale Ideal aus a) bzw. b) die Nullstellenmenge in $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass für die Nullstellenmengen in K^n folgende Aussagen gelten:

a) Es gibt Ideale $I_\varnothing, I_{K^n}$ von $K[X_1, \ldots, X_n]$, so dass $V(I_\varnothing) = \varnothing$ und $V(I_{K^n}) = K^n$.

b) Für zwei Nullstellenmengen $V_i = V(I_i)$ mit $i = 1,2$ gilt $V_1 \cup V_2 = V(I_1 \cap I_2)$. Die Vereinigung zweier Nullstellenmengen ist also wieder eine solche.

c) Seien $V_j = V(I_j)$ Nullstellenmengen, wobei j eine Indexmenge J durchläuft. Dann gilt $\bigcap_{j \in J} V_j = V(\sum_{j \in J} I_j)$. Der Durchschnitt beliebig vieler Nullstellenmengen ist also wieder eine solche.

Abgabe bis spätestens Dienstag, 8. 6. 2010, um 15:30 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt dort.