KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ALGEBRA UND GEOMETRIE
PROF. DR. F. HERRLICH
FLORIAN NISBACH

8. 6. 2010

Algebra II – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei k ein Körper von Charakteristik 0, und es existiere ein $1 \neq \zeta \in k$ mit $\zeta^3 = 1$. Bestimme $k[X,Y]^{\langle\sigma,\tau\rangle}$, wobei σ und τ gegeben seien durch

$$\sigma : \begin{cases} X \mapsto \zeta X \\ Y \mapsto \zeta^2 Y \end{cases} \quad , \quad \tau : \begin{cases} X \mapsto Y \\ Y \mapsto X \end{cases} \quad .$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $s_1, \ldots, s_n$ die elementarsymmetrischen Polynome in $R[X_1, \ldots, X_n]$. Zeige: Dann sind $s_1, \ldots, s_n$ algebraisch unabhängig über R, insbesondere gilt also $R[X_1, \ldots, X_n] \cong R[s_1, \ldots, s_n]$.

b) Zeige die folgende Identität in $R[X_1, \ldots, X_n, Y]$: $\prod_{i=1}^n (Y - X_i) = \sum_{j=0}^n (-1)^j s_j Y^{n-j}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Auf $\mathbb{N}^n$ sei auf die folgende Art und Weise eine Totalordnung erklärt, die sogenannte *lexikographische Ordnung*:

$$(\nu_1, \ldots, \nu_n) < (\nu'_1, \ldots, \nu'_n) \Leftrightarrow \exists j : \nu_j < \nu'_j \wedge \forall i < j : \nu_i = \nu'_i$$

Sei nun R ein kommutativer Ring mit Eins, und sei für $f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} c_\nu X^\nu \in R[X_1, \ldots, X_n]$ (wobei $X^\nu := X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$) der lexikographische Grad von f erklärt als $\operatorname{lexgrad}(f) := \max\{\nu \mid c_\nu \neq 0\}$. Zeige nun:

a) Ist $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ ein symmetrisches Polynom und $\operatorname{lexgrad}(f) = \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, dann gilt $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$.

b) Seien $s_1, \ldots, s_n$ die elementarsymmetrischen Polynome, f und μ wie in a),

$$g := c_\mu s_1^{\mu_1 - \mu_2} s_2^{\mu_2 - \mu_3} \cdots s_n^{\mu_n}.$$

Zeige: Dann gilt $\operatorname{lexgrad}(f - g) < \operatorname{lexgrad}(f)$ und $\deg(f - g) \leq \deg f$.

c) Folgere daraus, dass sich jedes symmetrische Polynom als Polynom in elementarsymmetrischen Polynomen schreiben lässt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass es dann ein Polynom $\Delta_n \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Sei k ein Körper, $f = X^n + c_1 X^{n-1} + \ldots + c_n \in k[X]$ ein Polynom, dann gilt $\Delta_n(-c_1, c_2, \ldots, (-1)^n c_n) \neq 0 \Leftrightarrow f$ ist separabel.

b) Berechne Δ_2 und Δ_3.

Abgabe bis spätestens Dienstag, 15. 6. 2010, um 15:30 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt dort.