

## Algebra II - Übungsblatt 9

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei  $K$  ein algebraisch abgeschlossener Körper und  $V = V(I) \subset K^n$  Nullstellenmenge eines Ideals  $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ . Der *Koordinatenring* von  $V$  ist durch  $K[V] := K[X_1, \dots, X_n]/I(V)$  gegeben. Zeige:

a) Für  $f \in K[V]$  ist  $V(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0\}$  wohldefiniert.

Nun sei  $\mathfrak{m}_x := \{f \in K[V] \mid x \in V(f)\}$  für  $x \in V$ . Zeige:

b)  $\mathfrak{m}_x$  ist maximales Ideal in  $K[V]$ .

c) Für  $x \neq y$  ist auch  $\mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$ .

d) Zu jedem maximalen Ideal  $\mathfrak{m}$  von  $K[V]$  gibt es ein  $x \in V$  mit  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ .

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei  $R$  ein Ring und  $S$  ein multiplikatives Untermonoid von  $R \setminus \{0\}$ . Sei weiter  $\mathfrak{p}$  ein Ideal von  $R$ , das maximal unter denjenigen Idealen von  $R$  ist, die mit  $S$  leeren Schnitt haben. Zeige, dass  $\mathfrak{p}$  ein Primideal ist.

b) Zeige, dass es solch ein Primideal immer gibt.

c) Folgere, dass das Radikalideal  $\text{Rad}(R) := \{r \in R \mid r \text{ nilpotent}\}$  gleich dem Durchschnitt aller Primideale von  $R$  ist.

d) Zeige, dass das Radikal  $\sqrt{I} = \{r \in R \mid r^d \in I \text{ für ein } d \in \mathbb{N}\}$  eines Ideals  $I$  von  $R$  gleich dem Durchschnitt aller Primideale von  $R$  ist, die  $I$  enthalten.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei  $R$  ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal  $\mathfrak{m}$  und  $M \neq \{0\}$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul. Zeige:

a) Es gibt einen surjektiven  $R$ -Modulhomomorphismus  $M \rightarrow R/\mathfrak{m}$ .

b) Ist  $N$  ein endlich erzeugter  $R$ -Modul mit  $M \otimes_R N = \{0\}$ , so ist  $N = \{0\}$ .

### Aufgabe 4 (4 Punkte)

Finde einen Ring  $R$  und ein maximales Ideal  $0 \neq \mathfrak{m} \triangleleft R$  mit  $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ .

**Abgabe** bis spätestens Dienstag, 22. 6. 2010, um 15:30 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen im Gebäudeteil 1C des Allianzgebäudes (1. Stock, Eingang Kaiserstr. 93) oder vor Beginn der Übung direkt dort.